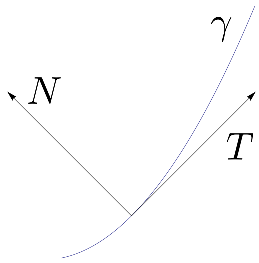
2.3 Krümmung

Definition 2.10 *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ reguläre Kurve. Dann heißt* $T = \gamma' = \frac{\dot\gamma}{\|\dot\gamma\|}$ Einheitstangentialvektor*, die Gerade $r \mapsto \gamma(t) + rT(t)$* Tangente *von γ in t und $N(t) = iT(t) = JT(t)$ mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Normale von γ in t.*



Beispiel 2.4 *Betrachte den (positiv orientierten) Kreis mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{R}^2$ und Radius r. $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\delta(t) = c + r(\cos(t), \sin(t))$. Es gilt $\dot\delta(t) = r(-\sin(t), \cos(t))$. D. h. δ ist nach Bogenlänge parametrisiert, genau dann, wenn $r = 1$ ist und die Normale von δ in t $N(t) = (-\cos(t), -\sin(t))$ zeigt immer in Richtung von $c - \delta(t)$.*

Bemerkung. Offenbar gilt $T \perp N$ ($\langle T, N\rangle = 0$) und $\|N\| = 1$. Ferner ist die Tangente von γ in t_0 die bestapproximierende Gerade durch $\gamma(t_0)$ an γ:

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)\alpha)}{t - t_0} = \dot\gamma(t_0) - \alpha$$

Also verschwindet die Differenz von γ zu einer Geraden durch t_0 genau dann von 1. Ordnung, wenn die Richtung der Geraden α ein Vielfaches von $T(t_0)$ ist.

Wir wollen nun den Begriff der Krümmung für eine reguläre Kurve einführen. Anschaulich sollte ein Kreis vom Radius r überall konstante Krümmung haben und eine kleinere Krümmung je größer der Radius r ist. Wir definieren also die Krümmung eines Kreises mir Radius r als $\kappa = 1/r$.

Für eine allgemeine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ werden wir jetzt den bestapproximierenden Kreis suchen.

Es gelte $\gamma''(s_0) \neq 0$. Man betrachtet dazu Kreise durch $\gamma(s_0)$ und $\gamma(s)$ mit gleichem Einheitstangentialvektor wie γ in s_0. Nun gilt für den Winkel ϕ zwischen der Normalen $N(s_0)$ und $\gamma(s) - \gamma(s_0)$ und für den Radius r des Kreises:

$$\cos\phi = \left\langle N(s_0), \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{\|\gamma(s) - \gamma(s_0)\|} \right\rangle = \frac{|\gamma(s) - \gamma(s_0)|}{2r}$$

Mit der Taylorentwicklung von $\gamma(s)$ in s_0 $\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s - s_0) + \frac{\gamma''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^3$ ergibt sich

$$\frac{|\gamma(s) - \gamma(s_0)|^2}{2r} = \left\langle N(s_0), \frac{\gamma''(s_0)}{2}(s - s_0)^2 + o(s - s_0)^3 \right\rangle$$

Teilt man beide Seiten durch $(s - s_0)^2$ und nimmt den Limes $s \to s_0$ erhält man schließlich für den Radius des bestapproximierenden Kreises:

$$\langle N(s_0), \gamma''(s_0) \rangle = \frac{1}{r} |\gamma'(s_0)|^2 = \frac{1}{r}$$

Man beachte, das der Radius hier vorzeichenbehaftet ist.

Definition 2.11 *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine bogenlängenparametrisierte Kurve und sei $s \in I$. Dann heißt $\kappa(s) = \langle N(s), \gamma''(s) \rangle = \langle N(s), T'(s) \rangle$ die* Krümmung *von γ in s. Ist $\kappa(s) \neq 0$, so heißt der Kreis mit Radius $r = 1/\kappa(s)$ mit Mittelpunkt $\gamma(s) + rN(s)$* Schmiegkreis *oder* Krümmungskreis *von γ in s. Er berührt γ in $\gamma(s)$. Sein Mittelpunkt wird auch* Krümmungsmittelpunkt *genannt.*

Bemerkung. Die Krümmung einer Kurve ist invariant unter Umparametrisierungen und euklidischen Bewegungen. Ersteres ist offensichtlich, da die Definition der Krümmung über die Bogenlängenparametrisierung gegeben ist, zweiteres folgt aus der Tatsache, das gegeben eine euklidische Bewegung $E(v) = Av + b$ für eine Kurve γ und ihre Transformierte $\delta = E \circ \gamma$ gilt $T_\delta = AT_\gamma$, $T'_\delta = AT'_\gamma$ und $N_\delta = AN_\gamma$. Also ist $\kappa_\delta = \langle N_\delta, T'_\delta \rangle = \left\langle AN_\gamma, AT'_\gamma \right\rangle = \left\langle N_\gamma, T'_\gamma \right\rangle = \kappa_\gamma$ (man beachte das A othogonal ist).

Bemerkung. [kinematische Interpretation] Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ Kurve, $t \in I$. $\dot{\gamma}(t)$ heißt *Geschwindigkeitsvektor*, $\|\dot{\gamma}(t)\|$ Geschwindigkeit, $\ddot{\gamma}(t)$ *Beschleunigung* und $\gamma''(t)$ *Krümmungsvektor* von γ in t. Ist γ nach der Bogenlänge parametrisiert, so ist die Beschleunigung gleich dem Krümmungsvektor und γ hat nur Beschleunigung senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Bemerkung. Wenn $\kappa \equiv 0$, so ist $\gamma(I)$ in einer Geraden enthalten (Übung). Ist κ konstant aber ungleich Null, so ist $\gamma(I)$ in einem Kreis enthalten:

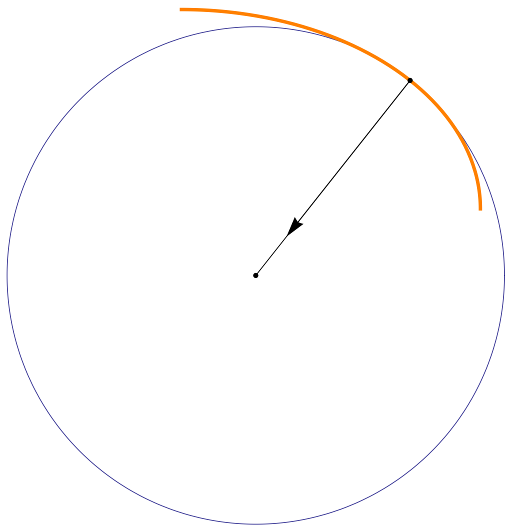
Betrachte die Mittelpunkte der Krümmungskreise $c(s) = \gamma(s) + rN(s)$ und ihre Ableitung $c'(s) = \gamma'(s) + rN'(s)$. Da für die Normale $\langle N(s), N(s) \rangle = 1$ gilt folgt $\langle N(s), N'(s) \rangle = 0$. Also ist N' parallel zu T. Andererseits ist $\langle N(s), T(s) \rangle = 0$ also $\langle N'(s), T(s) \rangle = -\langle N(s), T'(s) \rangle = -\kappa(s)$. Da in unserem Fall $\kappa(s) = 1/r$ gilt folgt $c'(s) = T(s) - T(s) = 0$. Also fallen alle Krümmungskreise zusammen und da für jedes t der Punkt $\gamma(t)$ in dem Krümmungskreis bei t liegt, ist $\gamma(I)$ in diesem Kreis enthalten.

Bemerkung. Für eine Kurve γ in allgemeiner Parametrisierung kann man die Krümmung wie folgt berechnen (Beweis in der Übung):

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

Definition 2.12 *Stellen lokale Extrema der Krümmung einer Kurve heißen* Scheitel *der Kurve.*

Bemerkung. Generisch schneidet eine Kurve ihre Krümmungskreise im Berührpunkt, d. h. sie liegt lokal auf einer Seite im Inneren des Kreises und auf der anderen außerhalb.



2.4 Hauptsatz

Satz 2.13 (Hauptsatz) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann existierte eine bis auf euklidische Bewegungen eindeutige bogenlängenparametrisierte Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, die κ als Krümmung besitzt.*