2.2 Bogenlänge und Umparametrisierung

Als erste Invariante einer Kurve betrachten wir ihre Bogenlänge. Anschaulich sollte das die Länge eines Fadens sein mit dem man die Kurve "nachlegen" kann.

Definition 2.4 *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine (stückweise) reguläre Kurve und $[a,b] \subset I$. Dann heißt*

$$L_{a,b}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

die Länge *(oder* Bogenlänge*) von γ auf $[a,b]$.*

Falls I unbeschränkt ist und die entsprechenden Integrale existieren, erklärt man sinngemäß auch $L_{-\infty,\infty}(\gamma)$ etc.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Definition der Bogenlänge als Grenzfall der Länge von der Kurve einbeschriebenen Polygonen verstanden werden kann.

Lemma 2.5 *Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $[a,b] \subset I$. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass für jede Zerlegung $\Sigma = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{m+1} = b\}$ von $[a,b]$ mit $\max_i |t_{i+1} - t_i| < \delta$ gilt:*

$$\left| L_{a,b}(\gamma) - \sum_{i=0}^{m} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \right| < \epsilon$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$, setze $f : I^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{\sum_k \dot{\gamma}_k(x_k)^2}$ (insbesondere ist also $f(t, \ldots, t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$). Offenbar ist f auf $[a,b]^n$ gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$ so das für alle $x_k, \tilde{x}_k \in [a,b]$ mit $|x_k - \tilde{x}_k| < \delta$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

folgt. Sei nun Σ eine Zerlegung mit $\max_i |t_{i+1} - t_i| < \delta$. Dann existiert nach Mittelwertsatz für γ_k auf $[t_i, t_{i+1}]$ ein $\xi_{k,i} \in [t_i, t_{i+1}]$ mit

$$\gamma_k(t_{i+1}) - \gamma_k(t_i) = \dot{\gamma}_k(\xi_{k,i})(t_{i+1} - t_i)$$

Andererseits gilt nach Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \|\dot{\gamma}(\eta_i)\|(t_{i+1} - t_i) = f(\eta_i, \ldots, \eta_i)(t_{i+1} - t_i)$$

für ein $\eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Da nach Wahl von $\Sigma\ |t_{i+1} - t_i| < \delta$ ist gilt $|\xi_{k,i} - \eta_i| < \delta$ und also

$$|f(\eta_i, \dots, \eta_i) - f(\xi_{1,i}, \dots, \xi_{n,i})| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Zusammen gilt somit

$$\left| \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\ dt - \sum_i \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \right| = \left| \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\dot\gamma(t)\|\ dt - \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \right| =$$

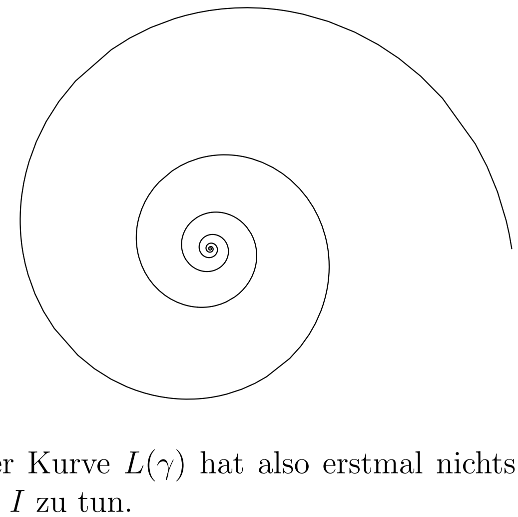
$$= \left| \sum_i (f(\eta_i, \dots, \eta_i) - f(\xi_{1,i}, \dots, \xi_{n,i}))(t_{i+1} - t_i) \right| < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_i |t_{i+1} - t_i| = \epsilon$$

□

Beispiel 2.3 (Logarithmische Spirale) *Die Kurve* $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, $\gamma(t) = ae^{(i-b)t}$, $a, b > 0$ *heißt logarithmische Spirale. Für ihre Bogenlänge auf* $[0, x]$ *gilt*

$$L_{0,x}(\gamma) = \int_0^x |a(i-b)e^{(i-b)t}|\ dt = a|i-b| \int_0^x e^{-bt}\ dt = a\frac{|i-b|}{b}(1 - e^{-bx}).$$

Insbesondere ist $L_{o,\infty}(\gamma) = a\frac{|i-b|}{b}$.

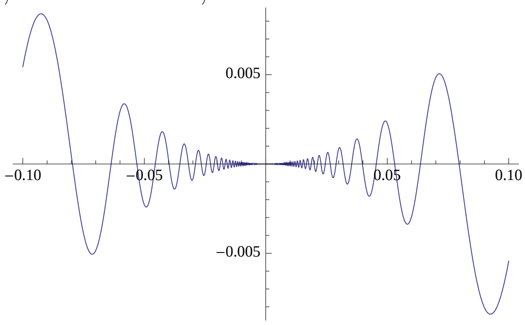


Die Länge einer Kurve $L(\gamma)$ hat also erstmal nichts mit der Länge des Parameterbereichs I zu tun.

Bemerkung. [nicht rektifizierbare Kurven] Um die Länge einer Kurve zu erklären braucht man i. a. mindestens C^1. Als Gegenbeispiel für eine nur stetige Kurve, für die man keine Bogenlänge erklären kann, kann die Koch Kurve herhalten. Im Falle differenzierbarer (aber nicht *stetig* differenzierbarer) Kurven kann man

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t^2 \sin(\frac{1}{t})), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

auf einem Intervall, das 0 enthält, betrachten[2]:



Bemerkung. Die Bogenlänge einer Kurve ist invariant unter euklidischen Bewegungen:

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ reguläre Kurve, $[a, b] \subset I$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ euklidische Bewegung. Dann gilt für $\tilde{\gamma} = T\gamma$, $T(v) = Av + b$, $A \in SO(n), b \in \mathbb{R}^n$.

$$L_{a,b}(\tilde{\gamma}) = \int_a^b \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{\langle A\dot{\gamma}(t), A\dot{\gamma}(t)\rangle} \, dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = L_{a,b}(\gamma)$$

2.2.1 Umparametrisierung

Definition 2.6 *Seien I, J Intervalle in $\mathbb{R}$, $\phi : J \to I$ Diffeomorphismus*[3] *und $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ Kurve. Dann ist $\delta : J \to \mathbb{R}^2$, $\delta = \gamma \circ \phi$ eine neue Kurve mit gleicher Spur wie γ ($\gamma(I) = \delta(J)$). δ heißt* Umparametrisierung *von γ. Ist γ regulär, so auch δ. Eine Umparametrisierung heißt* orientierungserhaltend, *falls $\dot{\phi} > 0$ ist.*

Lemma 2.7 *Ist δ eine Umparametrisierung von γ wie oben und ist $[a, b] \in J$, so ist $|L_{a,b}(\delta)| = |L_{\phi(a),\phi(b)}(\gamma)|$.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt:

$$|L_{a,b}(\delta)| = \left| \int_a^b \|\dot{\gamma} \circ \phi(t)\| |\dot{\phi}(t)| \, dt \right| = \left| \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \|\dot{\gamma}(u)\| \, du \right| = |L_{\phi(a),\phi(b)}(\gamma)|.$$

[2] Für die Ableitung einer differenzierbaren Funktion gilt ein Zwischenwertsatz. Ist sie nicht stetig, kann sie also nicht einfach eine Sprungstelle haben. Eine Funktion, die in 0 nicht stetig ist, aber nicht, weil links- und rechtsseitige Grenzwerte nicht übereinstimmen ist $f_0(x) = \sin(1/x)$ für $x \neq 0$ und $f_0(0) = 0$. Skaliert man sie mit x zu $f_1(x) = xf_0(x)$ erhält man eine Funktion, die zwar in 0 stetig, aber nicht differenzierbar ist. Skaliert man noch einmal mit x zu $f_2(x) = xf_1(x) = x^2 f_0(x)$, so hat man eine Funktion, die in 0 zwar differenzierbar, aber deren Ableitung nicht stetig ist (die Ableitung, weg von der 0 enthält $\cos(1/x)$). Der Graph dieser Funktion ist unser Gegenbeispiel.

[3] Ein Diffeomorphismus ist eine glatte invertierbare Abbildung mit glatter Umkehrabbildung.

Man beachte, dass $\dot{\phi} > 0$ oder $\dot{\phi} < 0$ gelten muss, da ϕ Diffeomorphismus ist. $\square$

2.2.2 Parametrisierung nach Bogenlänge

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ reguläre Kurve, $t_0 \in I$. Dann ist $s : I \to \mathbb{R}$, $s(t) = L_{t_0,t}(\gamma)$ die *Bogenlängenfunktion* von γ. s ist monoton und stetig differenzierbar, also invertierbar und ein Diffeomorphismus von $I \to J = s(I)$. Setze $\phi : J \to I$, $\phi = s^{-1}$. Dann gilt für $\delta = \gamma \circ \phi$:

$$\|\dot{\delta}\| = \|(\dot{\gamma} \circ \phi)\,\dot{\phi}\| = \|(\dot{\gamma} \circ \phi)\frac{1}{\dot{s} \circ \phi}\| = 1$$

Definition 2.8 *Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ heißt* nach Bogenlänge parametrisiert*, falls $\|\dot{\gamma}\| \equiv 1$.*

Offenbar gilt für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve γ

$$L_{a,b}(\gamma) = b - a.$$

Wir haben bereits gezeigt:

Satz 2.9 *Jede reguläre Kurve kann nach Bogenlänge umparametrisiert werden.*

Man beachte jedoch, das die Parametrisierung nach der Bogenlänge nicht eindeutig ist: Zu zwei Kurven γ und δ, die beide nach der Bogenlänge parametrisiert sind und orientierungserhaltende Umparametrisierungen von einander sind, gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ so das $\gamma(s) = \delta(s + t)$ ist.

Wir werden im folgenden die Notationen

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}\frac{d}{dt}$$

und $\gamma'(s) = \frac{d}{ds}\gamma(s)$ für die Ableitung nach der Bogenlänge von parametrisierten Kurven benutzen.