1 Einleitung

1.1 Motivation

1.1.1 Name of the game

Geometer bezeichnet klassisch einen Landvermesser (heute ist eher Geodät gebräuchlich[1]. Die klassische Differentialgeometrie war zunächst die Beschreibung geometrischer Objekte mit Methoden der Analysis. Punkte, Kurven und Flächen kann man im euklidischen Raum ($\mathbb{R}^n$) durch kartesische Koordinaten beschreiben. Zur Koodinatisierung von komplizierteren Mengen benutzt man Abblidungen (Karten) die die Mengen lokal auf ein Stück $\mathbb{R}^n$ abbilden. Abstrahiert man dieses Konzept, kommt man zum Studium der Mannigfaltigkeiten.

Wir werden uns zunächst mit Kurven in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und danach mit Fächentheorie beschäftigen.

Wie so oft in der Mathematik ist es auch in der Differentialgeometrie ein Hauptanliegen, Invarianten der untersuchten Objekte innerhalb des betrachteten Rahmens zu finden. Eine gewichtige Rolle wird hier der Krümmungsbegriff einnehmen.

In seiner als Erlanger Programm bekannt gewordenen Antrittsvorlesung (1872) hat Felix Klein gezeigt, wie man euklidische und die diversen nichteuklidischen Geometrien vereinheitlicht behandeln kann, wenn man sie als Invariantentheorie verschiedener (Transformations)Gruppenoperationen versteht.

Bemerkung. Eine der größeren Schwächen der Differentialgeometrie ist der Mangel an konsistenter Notation. Es gibt mehr verschiedene Notationen als Bücher und die allermeisten sind in einer Weise nicht konsistent, die die Lesbarkeit für Eingeweihte erhöht, für Anfänger jedoch deutlich reduziert.

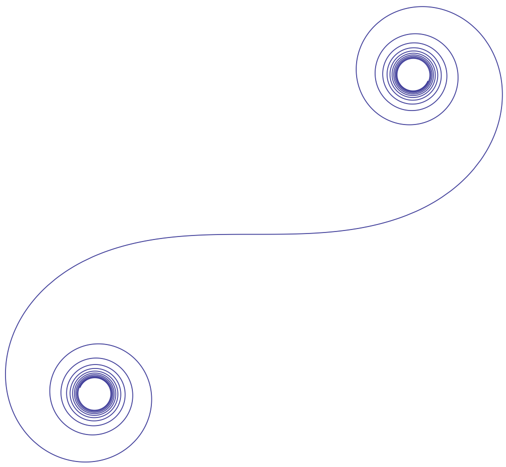
1.1.2 Einige Anwendungen

Einige Beispiele, die den Nutzen differentialgeometrischer Methoden veranschaulichen können, seien hier vorangestellt. Einige werden im Laufe der Vorlesung präziser gefasst, mögen aber schon jetzt einen Eindruck vermitteln, wohin die Reise geht.

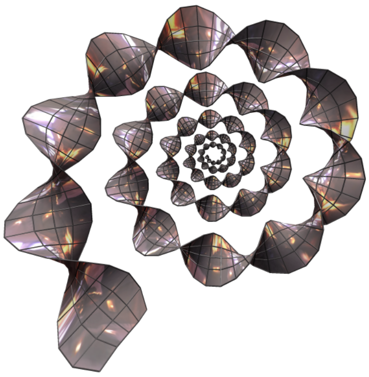
- Kurven: Klothoide im Strassenbau:
  Wie plant man eine Straße mit Kurve? Eine intuitive Vorstellung von

[1] In der Differentialgeometrie werden mit Geodäten bisweilen aber auch Geodätische bezeichnet: lokal kürzeste Kurven auf einer Mannigfaltigkeit

Krümmung hat man mit dem Einschlag des Lenkers beim Fahrradfahren. Hält man den Lenker konstant (und nicht zentriert) fährt man im Kreis. Wie baut man nun eine Straße die um die Kurve gehen soll? die naheliegende Idee auf das gerade Stücke ein Stück Kreisbogen folgen zu lassen ist nicht praktisch und sogar gefährlich: Wollte man so einer Linie folgen, muss man den Lenker ruckartig bewegen. Idealerweise sollte die Lenkbewegung stetig sein. Zum Einsatz kommen hier Klothoiden – Kurven, deren Krümmung linear ist. Wie man sie erzeugt, werden wir in Beispiel **??** sehen.



- Flächen: Minimalflächen, Flächen im Industriedesign.
  Differenzierbare Flächen sind in vielen Bereichen wichtig. Neben klassischen Beispielen wie Minimalflächen (Flächen mit minimaler Oberfläche bei gegebenem Rand), die Anwendungen in der Biologie und Physik genauso wie in der Architektur haben, spielen sie auch in der Modellierung für Design und Computergraphik eine Rolle. So ist die Differenzierbarkeitsordnung bis zu einer gewissen Ordnung eine sichtbar Eigenschaft von Oberflächen, was sich zum Beispiel in den Reflektionslinien von Karosserien zeigt (Früher wurden Modelle in der Automobilentwicklung mit Leuchtstoffröhren abgeleuchtet um Designschwächen aufzudecken, heute simuliert man das mit Raytracern im Computer). Oberflächen werden in der Computergraphik meist als Spline oder Subdivisionflächen realisiert.



- Mannigfaltigkeiten: Eines der großen klassischen Anwendungsgebiete der Differentialgeometrie in der Physik ist sicherlich die Allgemeine Relativitätstheorie, die die Gravitation in einer Raumzeit durch die Krümmung des Raumes modelliert.

  Symplektische Geometrie bildet die Grundlage moderner Beschreibungen der Klassischen Mechanik und dynamischer Systeme.

2 Kurven in $\mathbb{R}^2$

Man kann den Begriff einer Kurve auf verschiedene Weise einführen: Als Menge von Punkten, die eine gewisse Eigenschaft teilen (eine Ellipse kann man als Menge der Punkte definieren, deren Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten einen festen Wert hat)

$$E = \{p \in \mathbb{R}^2 |\ \|p - c_1\| + \|p - c_2\| = c\} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2, c > 0$$

oder als Spur eines Punktes unter einer Bewegung (eine Ellipse kann man als geschlossenen Orbit eines Himmelskörpers um ein Zentralgestirn erhalten)

$$E(t) = \frac{1}{2 + \cos t}(\cos t, \sin t).$$

Die zweite Art hat Vorteile nicht nur wenn die Kurve sich z. B. selbst schneidet sondern auch im Hinblick auf unsere weiteren Untersuchungen. Trotzdem ist man zunächst an geometrischen Eigenschaften der Punktmenge interessiert. Genauer an Eigenschaften die invariant sind unter (eigentlichen) euklidischen Bewegungen: Die Isometrien des $\mathbb{R}^n$ sind die affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$, deren linearer Teil orthogonal ist: $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $E(v) = Av + w$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $w \in \mathbb{R}^n$ und $AA^T = \mathrm{Id}$ (also $A \in O(n)$). Ist die Isometrie orientierungserhaltend (d.h. ist $A \in SO(n)$) so heißt sie (eigentliche) euklidische Bewegung, sonst uneigentlich.

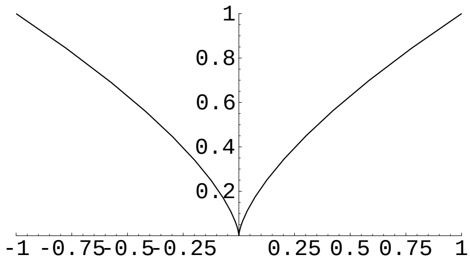
Wir werden falls nicht anders angemerkt unter differenzierbar immer C^∞ differenzierbar verstehen.

2.1 Definitionen

Definition 2.1 *1. Sei I ein offenes (evtl unbeschränktes) Intervall. Eine differenzierbare Abbildung $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt* Kurve.

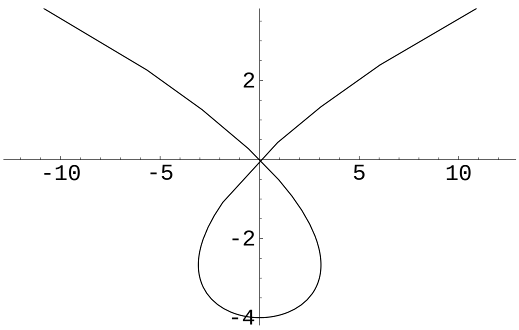
2. Der Vektor $\dot\gamma(t) = \left(\frac{d}{dt}\gamma_1(t), \ldots, \frac{d}{dt}\gamma_n(t)\right)$ heißt Tangentialvektor *von γ in t.*

Einige Bemerkungen zu dieser Defnintion: Bemerkenswert ist, das die Differenzierbarkeit der Vektorfunktion γ nicht bedeutet, dass die Spur von γ glatt ist. Die Kurve $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ hat beispielsweise einen Knick in $t = 0$:

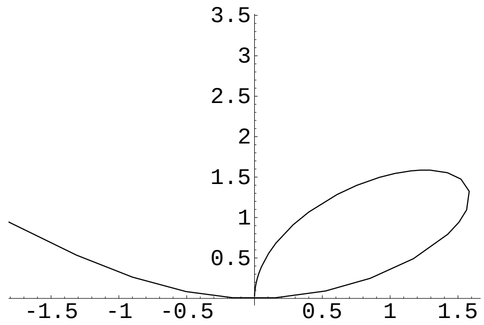


Man beachte hier, das $\dot\gamma$ an der fraglichen Stelle offenbar verschwindet.

Es ist für eine Kurve durchaus erlaubt, sich selbst zu schneiden: Betrachte $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$:



Die Spur einer injektiven Kurve muß nicht notwendig die Topologie eines Intervalls haben, wie das Folium Descartes $\gamma : (-1, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \frac{1}{1+t^3}(3t, 3t^2)$ zeigt:

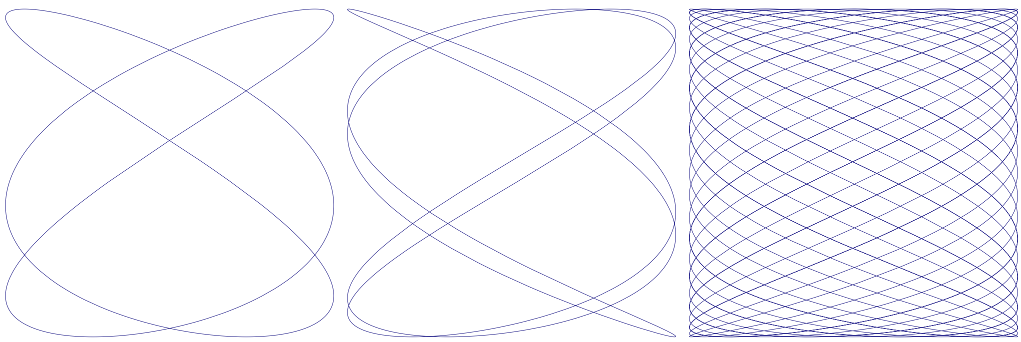


Was wir hier Kurve nennen wird bisweilen auch als *parametrisierte Kurve* bezeichet, um zu betonen, das die Abbildung und nicht ihre Spur betrachtet wird: zwei verschiedene Kurven können ja durchaus dieselbe Spur besitzen.

Was eine *geschlossene Kurve* ist ist anschaulich sicher klar. Man kann sie sich als eine glatte Abbildung vom Einheitskreis in die Ebene (oder den $\mathbb{R}^n$) beschreiben. Da wir aber Kurven als Abbildungen von einem Intervall betrachten, behelfen wir uns mit dem Begriff der periodischen Kurve:

Definition 2.2 *Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ heißt* periodisch *mit Periode $p \in \mathbb{R}$, falls $I = \mathbb{R}$ und $\gamma(t+p) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.*

Beispiel 2.1 (Lissajous Kurven) *Die Kurven $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\cos(\omega_1 t - \delta_1), b\sin(\omega_2 t - \delta_2))$ heißen Lissajous Kurven. Sie sind genau dann periodisch, wenn ω_1/ω_2 rational ist. Man kann sie als die Kurven eines idealen Harmonographen (bei dem die beiden Pendel keiner Dämpfung unterliegen) auffassen.*



Definition 2.3 *Eine Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ heißt* regulär, *falls ihr Tangentialvektor nirgends verschwindet. Punkte $t \in I$ mit $\dot\gamma(t) = 0$ heißen* singulär, *solche mit $\dot\gamma(t) \neq 0$ regulär. γ heißt* stückweise regulär, *falls γ nur endlich viele singuläre Punkte hat.*

Beispiel 2.2 *Ein Kreis mit Radius 1 rolle (schlupffrei) auf der x-Achse. Gesucht ist die Kurve γ, die ein Punkt auf dem Kreis beschreibt und ein maximales Intervall, auf dem γ regulär ist.*

Man kann γ über den Rotationswinkel parametrisieren:

$$\gamma(t) = (t, 1) - (\sin t, \cos t)$$

Dann gilt

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 0) - (\cos t, -\sin t)$$

und die singulären Punkte von γ sind bei $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Also ist γ auf jedem Intervall $(k2\pi, (k+1)2\pi)$ regulär. Die Kurve γ heißt Zykloide.