Euklidische Konstruktionen

Stephan Hartmann

27. April 2004

1 Historisches

Bis vor kurzem waren der Name Euklid (von Alexandria) und Geometrie Synonyme. Euklids Hauptwerk *Elemente* stellte über 23 Jahrhunderte hinweg das Standwerk der Mathematik dar. Viele Aussagen stammen zwar von früheren Mathematikern, seine große Leistung bestand aber dain, alle mathematischen Erkenntnisse seiner Zeit zusammenzufassen und in eine einheitliche Form zu bringen. Leider ist über das Leben dieses herausragenden Mathematikers nur sehr wenig bekannt. Es wird vermutet, dass Euklid an Platos Akademie in Athen studierte und ein frühes Mitglied des Museeums bzw. der Bibliothek in Alexandria war. Alexandria war seit Euklids Zeit – also 300 v. Chr. – für fast Tausend Jahre die intelektuelle Hauptstadt der Griechen sowie der Römer bis es im 7. Jahrhundert an die Araber fiel (die Alexandria nahezu dem Erdboden gleich machten).
Die griechische Mathematik und Wissenschaft ganz allgemein ist hauptsächlich ein Produkte des *Goldenen Zeitalters*, dem dritten Jahrhundert v. Chr.
Euklids Elemente teilt sich in dreizehn Bücher, denen seine Axiome und Postulate vorangehen. Im heutigen Verständnis der Mathematik sind die beiden Begriffe autauschbar.

Axiome:

(i) Dinge, die demselben Dinge gleich sind, sind einander gleich.

(ii) Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Summen gleich.

(iii) Nimmt man von Gleichem Gleiches hinweg, so sind die Reste gleich.

(iv) Was zur Deckung miteinander gebracht werden kann, ist einander gleich.

(v) Das Ganze ist größer als sein Teil.

Polstulate:

(i) Es soll gefordert werden, daß sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.

(ii) Ferner, daß sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.

(iii) Ferner, daß sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.

(iv) Ferner, daß alle rechten Winkel einander gleich seien.

(v) Schließlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Eine *Definition* ist eine Abkürzung. Definitionen verkürzen mathematische Konzepte mit Symbolen und Worten (die genaugenommen natürlich wieder Symbole darstellen). $\triangle ABC$ ist definiert als die Abkürzung von: Dreieck mit den Ecken A, B und C. Einige gehen sogar soweit, zu sagen, dass die eigentliche Kunst bzw. Leistung der Mathematik darin besteht, geeignete Definitionen zu finden oder in Sokrates Worten: Der Beginn von Weisheit ist die Definition von Begriffen.
Jedes Buch der Elemente beinhaltet Theoreme und Probleme. Ein *Theorem* ist eine Aussage, die einen Beweis hat, der auf einer gegebenen Menge von Postulaten und bereits bewiesenen Theoremen besteht. Ein Beweis ist eine überzeugende Argumetation. Ein *Problem* in Euklids Sinne stellt die Aufgabe, wie ein neues geometrisches Gebilde aus einer gegebenen Menge erzeugt werden kann. Eine Lösung eines solchen Problems wird als *Konstruktion* bezeichnet. Eine Konstruktion ist wiederum ein Theorem, das die Form eines Kochrezepts hat und eines Beweises bedarf: Wenn man, das, das und das macht, kommt das raus. Ein solches Rezept wird auch als Algorithmus bezeichnet, nachdem es eine wohldefinierte Berechnungsprozedur ist, einen oder mehrere Werte als Ein- und Ausgabe besitzt, eindeutig und korrekt ist und vor allem terminiert (d.h. in endlicher Zeit fertig ist).
Eine Konstruktion ist also eine spezielle Art von Theorem, das zugleich ein Algorithmus ist. Um sich diese Problem-Konstruktion-Beweis-Kette zu verdeutlichen, diene Euklids erste Proposition:

Euklid I.1 *Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck mit gegebenem Segment als eine Seite.*

Konstruktion für I.1
Wenn A und B zwei Punkte sind, und C auf dem Schnittpunkt der Kreise A_B und B_A (Definition) liegt, dann ist $\triangle ABC$ gleichschenklig.

Eine Konstuktion mach insbesondere nicht nur eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sondern gibt auch einen expliziten Weg an, wie diese zu finden ist. Die Begründung für die Richtigkeit der Konstruktion ist kurz.

Beweis: Da $AC = AB$ und $BC = BA$ gilt, weil Radien des selben Kreises kongruent sind, folgt $AB = BC = CA$. $\diamond$

Zusätzlich sollte man sich den Spaß nicht entgehen lassen, das Theorem graphisch darzustellen, indem man eine sauber gezeichnete Illustration mit geometrischen Werkzeugen anfertigt. Normalerweise bezeichnet man diese Zeichnung ebenfalls als Konstruktion. "Konstruktion" hat folglich zwei technische Bedeutungen. Genau die Verbindung dieser beiden Bedeutungen ist es, die über die Jahrhunderte hinweg so vielen Leuten so viel Freude bereitet hat.

Eine *Skizze* bezeichnet bei uns eine nicht formale, freihändige Darstellung einer formalen Konstruktions-Zeichnung. Normalerweise reichen Skizzen für unsere Bedürfnisse völlig aus.
Als letzte Spitzfindigkeit in puncto Wörter und deren Bedeutung betonen wir noch kurz den Unterschied zwischen dem allgemeinen Begriff *Figur* und dessen technischer Verwendung, in der der Begriff eine Menge von Punkten in einer Ebene beschreibt. An dieser Stelle ist es wichtig, nicht der Versuchung zu verfallen und anhand von Skizzen und Konstruktions-Zeichnungen zu argumentieren. Deshalb gingen einige soweit, Figuren komplett aus der Geometrie zu verbannen; allerdings helfen uns selbige, über komplizierte Algorithmen den Überblick zu behalten. Geometrie ohne Figuren ist möglich aber macht keine Freude.

Übersicht über die verwendeten Abkürzungen:

$A - B - C$	bedeutet, Punkt B liegt zwischen den Punkten A und C.
$\overleftrightarrow{AB}$	bezeichnet die Linie durch die zwei Punkte A und B.
$\overrightarrow{AB}$	bezeichnet den Strahl mit Ursprung A, der durch B läuft.
$\overline{AB}$	bezeichnet das Segment mit den Endpunkten A und B.
AB	bezeichnet die Entfernung von A nach B.
A_B	bezechnet einen Kreis mit Mittelpunkt A durch den Punkt B.
A_{BC}	bezeichnet einen Kreis mit Mittelpunkt A und Radius BC.
$m\angle ABC$	bezeichnet das Gradmaß des Winkels $\angle ABC$.
$\triangle ABC$	bezeichnet das Dreieck mit den Ecken A, B, C.
ABC	bezeichnet die Fläche von $\triangle ABC$.
$\square ABCD$	bezeichnet das Reckteck mit den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$.
$ABCD$	bezeichnet die Fläche von $\square ABCD$.
$p = q$	bedeutet, "p" und "q" sind Namen des selben Objekts.
$p \cong q$	liest man "p ist kongruent zu q."
$p \sim q$	liest man "p ist ähnlich zu q."

Der Ausdruck "Gegeben sei ein Segment" bedeutet, dass natürlich die beiden Endpunkte bestimmt sind.
Nahezu jedem ist die Abkürzung "Q.E.D" bekannt. Mit "Q.E.F" wissen jedoch nur wenige was anzufangen. Es bedeutet ausgeschrieben "quod erat factorum" – "Was zu konstruieren war" – und steht am Ende des Beweises einer Konstruktion, die das gestellte Problem löst. Streng genommen muss man hier noch anfügen, dass diese Abkürzungen natürlich aus den lateinischen Übersetzungen übernommen wurden. Heute wird dagegen meistens eine Zeichen wie ($\diamond$) benutzt.
Aus Gründen der leichteren Verweisbarkeit möchte ich hier noch kurz auf die Namensgebung der Probleme und Theoreme aus Euklids Elemente eingehen: Die römische Zahl bezeichnet das Buch, die arabische die Aussage.

2 Werkzeuge und Hilfsmittel

Welche Werkzeuge sind nun für diese Konstruktionen verfügbar bzw. zulässig? Davon abgesehen, dass wir in späteren Vorträgen auch von der Aufgabenstellung verschiedene

Vorgaben haben, scheint selbst im allgemeinen Fall die Antwort "Lineal und Zirkel" bei näherer Betrachtung als unzureichend.

- Mit einem *Euklidischen Lineal* ist es lediglich möglich, eine unendlich lange, gerade Linie durch zwei gegebene Punkte zu zeichnen. Ein tatsächliches Modell davon hat also keine Maß-Markierungen, eine Länge, die – wie nicht anders zu erwarten – begrenzt ist, und wird deswegen auch als Abrichtlineal (engl. straightedge) bezeichnet. Im Rahmen unseres Seminars werden wir als Lineal stillschweigend immer eine Euklidisches Lineal annehmen, es sei denn es, wird explizit eine andere Voraussetzung gemacht.

- Der *moderne Zirkel*, ein Zirkel wie man ihn heute im Schreibwarenladen erhält – der am Rande bemerkt all unsere Bedürfnisse deckt – dient uns sowohl als Stechzirkel (engl. dividers) als auch für die Aufgabe, einen Kreis zu zeichnen. Um einen Kreis zu zeichnen, benötigt man lediglich einen als Mittelpunkt ausgezeichneten Punkt und als Radius die Länge eines gegebenen Liniensegment.

- Der *Euklidische Zirkel* kann hingegen ausschließlich dazu benutzt werden, einen Kreis mit gegebenem Mittelpunkt durch einen weiteren gegebenen Punkt zu zeichnen. Er hat nämlich die Eigenart zusammenzufallen, wenn er angehoben wird, und kann deswegen nicht als Stechzirkel – also zur Längenübertragung – verwendet werden. Es gibt zwei Gründe warum wir bei einem Zirkel immer von einem modernen Zirkel ausgehen. Erstens ist es schwer, sich einen funktionsfähigen Euklidischen Zirkel vorzustellen. Der zweite und bei weitem wichtigere Grund ist aber folgender: Zur Konstruktion von I.1, I.2 und I.3 sind lediglich ein Lineal und ein Euklidischer Zirkel vorausgesetzt.

Alle Operationen, die mit Lineal und Zirkle ausgeführt werden können, werden auch als *Euklidische Primitive* bezeichnet. Wie uns allen bekannt ist, reichen diese allerdings nicht aus um alle geometrischen Berechnungen ausführen zu können (Stichwort: Winkel-Dreiteilung. Dazu später mehr.).

Euklid I.2 *Konstruiere zu einem gegebenen Segment ein kongruentes Segment mit einem gegebenen Punkt als Endpunkt.*

Euklid I.3 *Seinen* $\overrightarrow{AB}$ *und* $\overline{CD}$ *gegeben. Konstruiere einen Punkt* E *auf* $\overrightarrow{AB}$*, so dass* $\overline{AE} \cong \overline{CD}$*.*

Wir formulieren I.2 nun um, um geben die von Euklid vorgeschlagene Konstruktion an.
Aufgabe: Seinen Punkt A und Segment $\overline{BC}$ gegeben. Konstruiere $\overline{AF}$, so dass $\overline{AF} \cong \overline{BC}$.
Konstruktion für I.2:
Sei D der Schnittpunkt der Kreise A_B und B_A.
Sei E der Schnittpunkt von B_C und $\overrightarrow{DB}$, so dass B zwischen D und E liegt.
Sei F der Schnittpunkt von D_E und $\overrightarrow{DA}$.
Dann ist $\overline{AF} \cong \overline{BC}$.

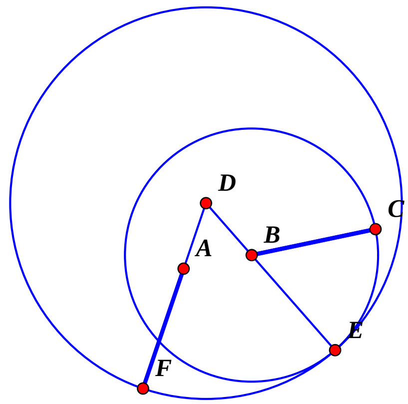

Abbildung 1: Längenübertragung

Beweis: Da $DA + AF = DF = DE = DB + BE = DA + BC$, gilt $AF = BC$ $\diamond$.

Die Konstruktion wird wesentlich verständlicher, wenn man die zugehörige Figur betrachtet. An dieser Stelle sollte man noch auf die Konvention aufmerksam machen, Punkte immer in der Reihenfolge zu alphabetisch benennen, die der sie in der Konstruktion auftreten (die Konstruktion ist dadurch einfacher zu verstehen).

Mit Lineal und modernem Zirkel ist die Lösung von I.3 unter Zuhilfenahme der vorhin eingeführten Notation offensichtlich: E ist der Schnittspunkt von $\overrightarrow{AB}$ und A_{CD}. Die Schwierigkeit besteht also darin A_{CD} mit einem Lineal und Euklidischen Zirkel zu konstruieren. I.2 ist genau die Voraussetzung, um mit einem weiteren Euklidischen Zirkelschlag I.3 zu folgern.
Hat man also eine Lösung mit Lineal und Euklidischem Zirkel gefunden, kann man folgern, dass "Lineal und Euklidischer Zirkel" äquivalent ist mit "Lineal und Moderner Zirkel".

Es sind also die gleichen Kreise mit einem Modernen Zirkel und Lineal konstruierbar, die es auch mit einem Euklidischen Zirkel und einem Lineal sind. Man muss allerdings mehr Konstruktionsschritte mit einem Euklidischen Zirkel machen. Die dritte Proposition zeigt, dass man mit dem Euklidischen Zirkel auch Längen übertragen kann.

Zu jeder Konstruktion kann man ein Kurz-Notation anstatt des ausgeschriebenen Wortlautes angeben:

$$\begin{array}{c|c|c} & p, q & \\ \hline & P, Q & \end{array}$$

steht z.B. kurz für "Seinen P und Q Schnittpunkte der Figuren p, und q." Weist man nun jedem einzelen Satz aus obiger Konstruktion eine derartige Kurzform zu und ergänzt eventuelle, zusätzliche Bedingungen, so erhält man folgende Version:

A_B, B_A	B_C, $\overrightarrow{DB}$	$D_E, \overrightarrow{DA}$	F
D	E	F	
	$D - B - E$		

Wie man eine Winkelhalbierende zu gegebenem Winkel (I.9) bzw. den Mittelpunkt zwischen zwei gegebenen Punkten konstruiert (I.10), dürfte hinlänglich bekannt sein. Nachdem auch die Konstruktion einer Senkrechten zu einem gegebenen Segment durch einen beliebigen Punkt (auf oder neben der Linie) (I.11, I.12) keine echte Herausforderung darstellt (Prinzip Schnitt zweier Kreise gleichen Durchmessers) möchte ich das Schema an folgender Aufgabe nochmal verdeutlichen:

Euklid I.23 *Seinen $\overline{AB}$ und $\angle CDE$ gegeben. Konstruiere $\angle BAH$, der zu $\angle CDE$ kongruent ist.*

$D_{AB}, \overrightarrow{DC}$	$D_{AB}, \overrightarrow{DE}$	A_B, B_{FG}	$\angle BAH$
F	G	H	

Als Ergebnis stellen wir hier zusätzlich fest, dass wir Winkel mit Lineal und Zirkel übertragen können.

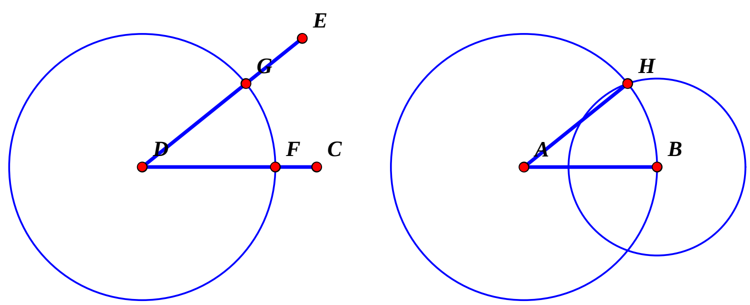

Abbildung 2: Winkelübertragung

Der Vollständigkeit halber muss hier an dieser Stelle noch folgende (zugegebenermaßen einfache aber sehr bedeutende Aufgabe) erwähnt werden:

Euklid I.31 *Seien $\overline{AB}$ und ein Punkt P neben $\overline{AB}$ gegeben. Konstruiere eine Gerade durch P, die parallel zu $\overleftrightarrow{AB}$ ist.*

P_{AB}, B_{AP}	$\overleftrightarrow{PC}$
C	
$\overline{AC}$ schneidet $\overleftrightarrow{BP}$	

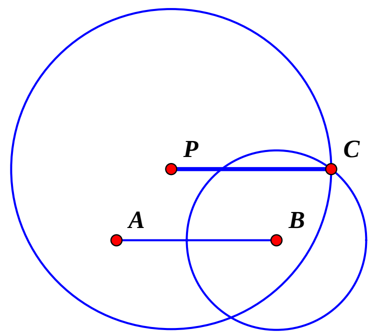

Abbildung 3: Playfairs Fassung: Lösung mittels Parallelogramm

Diese Aussage wird oft fälschlicherweise Euklidsches Parallelenaxiom genannt. Tatsächlich handelt es sich hierbei nicht um Formulierung Euklids, sondern um eine äquivalente, vereinfachte Form von *John Playfair* (1748 - 1819). Eine Kostruktion für dieses Problem scheint nicht schwer zu sein. Wenn ich jetzt allerdings sage, dass es mindestens 11 verschiedene gibt, wird trotzdem jeder etwas ins grübeln kommen.
Der Vollständigkeit halber an dieser Stelle noch das originale Euklidsche Parallelenaxiom:
Wenn die Punkte A und D auf der selben seite von $\overleftrightarrow{BC}$ sind, und $m\angle ABC + m\angle BCD < 180$, dann schneiden sich $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{CD}$.

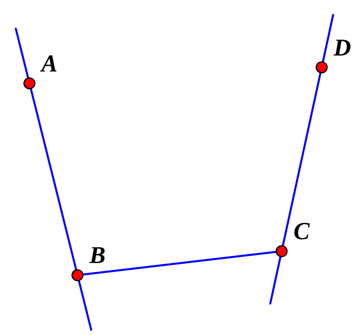

Abbildung 4: Euklids Fassung von I.31

3 Rechnen mit Konstruktionen

3.1 Quadratur eines Polygons

Zu Beginn dieses Kapitels möchte ich die folgenden beiden Aufgaben stellen:

Euklid I.42 *Seien $\triangle ABC$ und $\angle DEF$ gegeben. Konstruiere ein Parallelogramm $\square GHIJ$, so dass $\angle JGH \cong \angle DEF$ und $GHIJ = ABC$.*

Hier möchte ich die Konstruktion anhand dieser Skizze verdeutlichen.

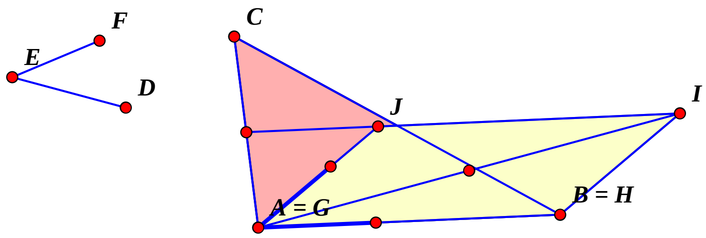

Abbildung 5: Flächengleiches Parallelogramm mit gegebenem Winkel

Euklid I.44 *Seien $\overline{AB}, \triangle PQR$ und $\angle STU$ gegeben. Konstruiere ein Parallelogramm $\square ABHI$, so dass $\angle ABH \cong \angle STU$ und $ABHI = PQR$.*

Dieses Problem läßt sich unter Zuhilfenahme von I.42 sehr leicht lösen. Man konstruiert zuerst ein Parallelogramm ohne die zusätzliche Längen-Bedingung an $\overline{AB}$. Unter Ausnützung von I.31 bei der Konstruktion für Parallelogramme und mit dem Wissen, dass die Diagonalen eines Parallelogramms dessen Fläche in zwei gleichgroße Teile teilen, erkennt man an folgender Figur sofort die Korrektheit der Konstruktion.

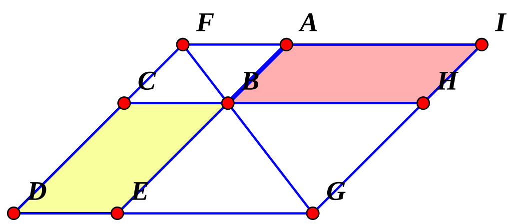

Abbildung 6: Flächengleiches Parallelogramm mit gegebenem Winkel und gegebener Seitenlänge

Es ist ein Charakteristikum der Mathematik, bereits bewiesene Aussagen zum Beweisen neuer Aussagen heranzuziehen. Nahezu jeder Beweis verwendet bewiesene Aussagen, ohne den Beweis zu wiederholen. Die Geometrie ist hierzu keine große Ausnahme. Nur im Falle einer Zeichnung müssen alle Schritte wiederholt werden. Es ist z.B. nicht möglich ein zu einem gegebenen Dreieck flächengleiches Parallelogramm als gegeben vorauszusetzen nur weil uns die entsprechende Konstruktion (und deren Beweis) bekannt ist. Will man mit diesem Parallelogramm weiterreichnen, so muss man es auch neu konstruieren! In dem eben gesehen Beispiel war es nur Dank einer Zusatzannahme möglich, dieser Tatsache zu entrinnen.

Wir wissen jetzt also, wie wan von einem Dreieck auf das entsprechende Parallelogramm kommt.

Euklid I.45 *Konstruiere ein Parallelogramm mit einer gegebenen Seite, gegebenem Winkel und einer Fläche, die gleich groß ist, wie die eines gegebenen Polygons.*

Wiederholte Anwendung von I.44 vs. Ecken der Reihe nach verschwinden lassen unter Zuhilfenahme der Tatsache, dass Dreiecke mit gleicher Höhe und gleicher Grundseite auch die gleiche Fläche haben. Daraus entsteht ein Dreieck; bleibt lediglich die Anwendung von I.44.

Es wird angenommen, dass beschreibende Mathemetik (engl. deductive mathemetics) seine Wurzeln um 600 v. Chr. bei Thales von Milet, also 300 Jahre von Euklid hat. Leider sind die Aussagen des ersten echte Mathematikers samt Beweise über die Zeit verloren gegangen. Ein guter Kandidat für den Preis " ältester mathematischer Satz der Welt" ist sicherlich der *Satz von Thales*: Jeder in einem Halbreis einbeschriebene Winkel ist ein rechte Winkel. Dieser Satz findet sich auch in Elemente wieder unter der Nummer III.31. Das Interesse für diesen Satz ist natürlich nicht ganz unmotiviert, wie wir jetzt sofort sehen werden.

Euklid II.14 *Konstruiere ein Quadrat, das flächengleich zu einem gegebenen Polygon ist.*

Aufgrund der bisher betrachteten Aufgaben reduziert sich dieses Problem darauf, ein gegebenes Rechteck zu quadrieren.

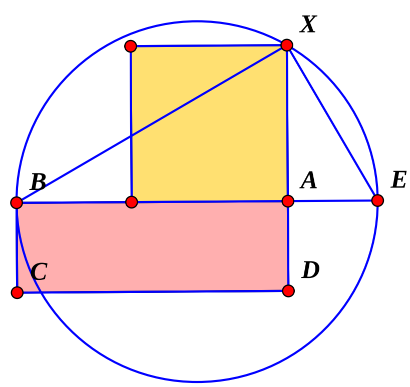

Abbildung 7: Flächengleiches Quadrat zu gegebenem Rechteck

Beweis: $\triangle ABX \cong \triangle AXE$ da wegen dem Satz von Thales $m\angle BXE = 90$. Deswegen gilt $AX/AE = AB/AX$. Nach einfachem Umformen folgt $AX^2 = (AB)(AE) = (AB)(AD)$. Damit ist die Konstruktion korrekt. $\diamond$

3.2 Konstruktion eines regelmäßigen Pentagons (Fünfeck)

Dazu wenden wir uns zuerst (etwas zusammenhangslos) dem folgenden Problem zu:

Euklid II.11 *Sei $\overline{AB}$ gegeben. Konstruiere Punkt X auf $\overline{AB}$, so dass $(AB)(BX) = AX^2$.*

Das Problem ist also kein anderes, als eine Strecke im *Goldenen Schnitt* zu teilen. Warum ist diese konstruktive Teilung aber so interessant? Zum einen gilt dieses Verhältnis seit der Antike als ideales Verhältnis inArchitektur und Kunst. Zum anderen findet es auch in der Geometrie seine Entsprechung u.a. bei der Konstruktion des Pentagons. Die Konstruktion an sich ist denkbar einfach.

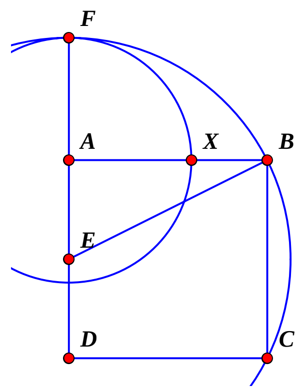

Abbildung 8: Goldener Schnitt

Konstruktion für II.11
Konstruiere zu $\overline{AB}$ die Punkte C und D, so das $\square ABCD$ ein Quadrat bilden.
Sei E der Mittelpunkt von $\overline{AD}$.
E_B schneidet $\overrightarrow{EA}$ in F.
A_F schneidet $\overrightarrow{AB}$ in X.
Dann liegt X auf $\overline{AB}$ und $(AB)(BX) = AX^2$.
Beweis: Alle Punkte sind mit bekannten Hilfsmitteln bzw. Sätzen konstruierbar. Die Richtigkeit geht aus folgender Überlegung hervor:

$$\underbrace{AX}_{=AF} + AE = EF = EB < AB + AE$$

(Die Summe der Katheten ist länger als die Hypothenuse, da Dreieck nicht entartet.) Daraus folgt $AX < AB$ was bedeutet, dass X auf $\overline{AB}$ liegt. Mit dem Satz des Pythagoras $AB^2 + AE^2 = BE^2$ folgt

$$AB^2 = \underbrace{BE^2}_{=EF^2} - AE^2 = EF^2 - AE^2.$$

Damit gilt:

$$(AB)\underbrace{(BX + AX)}_{=(AB)} \quad = \quad AB^2 = EF^2 - AE^2$$

$$
\begin{aligned}
&= (EF + \underbrace{AE}_{=DE})(EF - AE) = (FD)\underbrace{(AF)}_{=AX} \\
&= (\underbrace{AF}_{=AX} + \underbrace{AD}_{AB})(AX) \\
&= (AX + AB)(AX).
\end{aligned}
$$

Multiplitiert man den ersten und letzten Teil der Gleichung aus, erhält man

$$(AB)(BX) + (AB)(AX) = (AX)^2 + (AB)(AX)$$

und damit $(AB)(BX) = AX^2$. $\diamond$

Stellt man sich nun die Frage nach den numerischen Werten, geht man folgendermaßen vor:

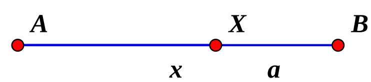

Abbildung 9: Verhältnis beim Goldener Schnitt

Sei $AB = a$ und $AX = x$. Es muss gelten: $a/x = x/(a-x)$. Ausmultiplizieren und umstellen führt zu: $x^2 + ax - a^2 = 0$. Daraus ergibt sich für die Lösung (die bereits durch a gekürzt wurde)

$$\frac{x}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Wir gehen nun zu folgendem Problem über:

Euklid IV.10 *Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basiswinkel doppelt so groß sind, wie der dritte Winkel.*

Die Frage ist, wieso uns dieses Problem überhaupt interssiert. Wir stellen zuerst die Konstruktion vor.

Konstruktion für IV.10
Gegeben sei A_B.
Die Normale auf $\overline{AB}$ im Punkt A schneide A_B in C.
Sei D der Mittelpunkt von $\overline{AC}$.
D_B schneide $\overrightarrow{CA}$ in E.
A_E schneide $\overrightarrow{AB}$ in F.
B_{AF} schneide A_B in G.

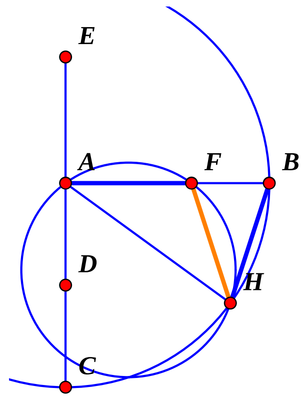

Abbildung 10: Teil des Dekagon (regelmäßiges 10-Eck)

Dann $m\angle BAG = 36$ und $m\angle ABG = m\angle AGB = 2m\angle BAG = 72$.

Beweis: Nach II.11 (goldener Schnitt) liegt F so auf $\overline{AB}$, dass $(AB)(BF) = AF^2 = BG^2$. Mit III.37 (den ich auslassen möchte) folgt, dass $\overleftrightarrow{BG}$ eine Tangente an den Umkreis um $\triangle AFG$ ist. Infolgedessen ist $\angle BAG \cong \angle FGB$. $m\angle BAG + m\angle FGA = m\angle BFG$ ($\angle AFG$ ergänzt beide auf 180). Deswegen gilt $\angle BFG \cong \angle BGA$. Da nun $\triangle ABG$ offensichtlich gleichschenklig ist (aufgrund der Konstruktion), gilt $\angle FBG \cong \angle BGA$. Deswegen ist auch $\triangle GBF$ gleichschenklig und $GF = BG (= AF)$. Damit $\angle FGA \cong \angle FAG$. Schließlich folgt daraus, dass $m\angle BGA = 2m\angle BAG$. $m\angle BAG = 36$ wie gewünscht. $\diamond$

Der Schritt zum Pentagon sollte nun jedem klar sein – man läßt einfach jeden zweiten Randpunkt aus.

3.3 Arithmetische Operationen

An dieser Stelle möchte ich kurz zeigen, dass man konstruktiv alle folgenden arithmetischen Probleme lösen kann:

(i) $a + b$

(ii) $a - b$

(iii) ab

(iv) a/b

(v) $\sqrt{a^2 + b^2}$

(vi) $\sqrt{a}$

(i) und (ii) dürften allen geläufig sein. Die konstruktive Multiplikation (iii) bedient sich dem Vierstreckensatz:

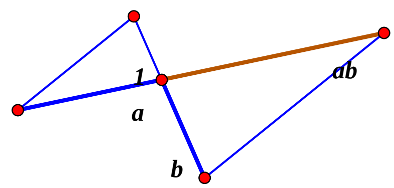

Abbildung 11: Konstruktive Multiplikation

Nachdem die beiden Dreiecke ähnlich sind, muss folgende Gleichung gelten:

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{b}.$$

Diese wird durch $x = ab$ erfüllt.
Die Division (iv) geht, wie an Abbildung 12 sichtbar, sehr ähnlich mit analoger Begründung:

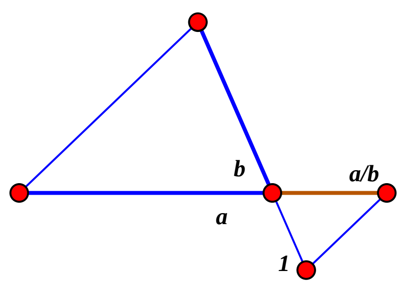

Abbildung 12: Konstruktive Division

(v) funktioniert mit der gezeichneten Variante des Satzes von Pythagoras.
Bleibt noch die Konstruktion der Wurzel die wir eigentlich in II.14 (Quadratur des Rechtecks) bereits gelöst haben. Zur Erinnerung:

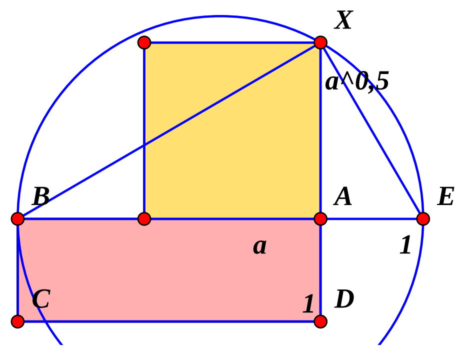

Abbildung 13: Wurzelkonstruktion – Flächengleiches Quadrat zu gegebenem Rechteck

Hier wählt man ein Rechteck mit Höhe 1. Damit ergibt sich für die Seitenverhältnisse

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1} \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{a}$$

Wir haben jetzt einiges über die gängigen Konstruktionshilfsmittel gehört - wie sieht es aber mit weiteren aus?

4 Weitere Werkzeuge

Die Spielregel, die Werkbank für geometrische Konstruktionen auf Lineal und Zirkel zu beschränken heißt "Platonische Beschränkung" und hat bereits vor Euklid existiert. Auch wenn nicht klar ist, was genau Plato dazu veranlasst hat, so sind Lineal und Zirkel die den grundlegendsten geometrischen Figuren (Geraden und Kreise) zuzuordnenden Werkzeuge. Diese beiden sind jedoch nicht die einzigen Konstruktionswerkzeuge. Wir werden in den folgenden Vorträgen noch einige kennenlernen. Ein besonders interessantes möchte ich aber hier vorstellen – den sogenannten *Tomahawk* oder *trisector*. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts kam dieses Werkzeug auf, mit dem man etwas bewerkstelligte, was bis dato konstruktiv nicht möglich war – die Dreiteilung eines Winkels. Die idealisierte Version eines Tomahawks sieht wie Abbildung 14 aus:

Dabei gilt $AB = BC = CD$. Der Halbkreis hat den Durchmesser $\overline{BD}$, und es gilt $\overrightarrow{BE} \perp \overline{AB}$.
Der muss nun so angesetzt werden, dass V auf $\overrightarrow{BE}$, A auf einer Seite des Winkels und die andere Seite des Winkels an den Kreis eine Tangente bildet. Nun kann man sich auch leicht davon überzeugen, dass der Winkel durch $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BE}$ in drei gleiche Teile geteilt wird. Hängt man rechts ein weiteres starres T an, erhält man ein Werkzeug, namens *Quinsector*, womit man einen Winkel in fünf gleiche Teile teilen kann. Diese Vorgehensweise läßt sich so auf jede ungerade Zahl fortsetzen.
Bis Mitte des 20. Jahrhunderts kannten alle Geometer Euklids Aussagen mit Nummer. Auch wenn dies heutzutage nicht mehr der Fall ist, so gehen wir ab jetzt davon aus das

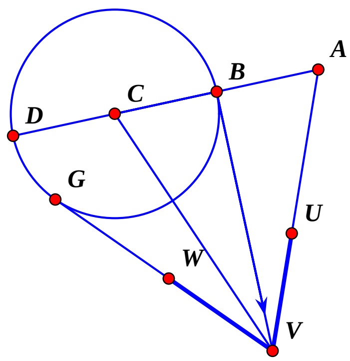

Abbildung 14: Tomahawk (Trisektor)

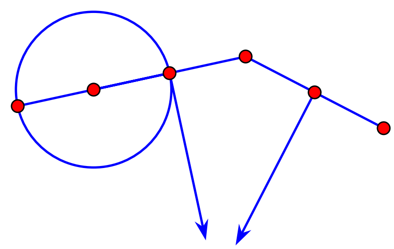

Abbildung 15: Quinsektor

die Aussagen I.2, I.3 und I.31 zum Zwecke der Bezugnahme mit Nummer bekannt sind. I.2 ist sehr wichtig, da es die Äquivalenz zwischen Euklidischem und modernen Zirkel in Verbindung mit einem Lineal zeigt. I.3 beschreibt, was ein Stechzirkel leistet. In späteren Vorträgen werden wir etwas darüber hören, was man mit Lineal und Steckzirkel alleine machen kann. I.31 ist schon allein aufgrund der fundamentalen Bedeutung von Parallelen in der Konstruktion eine zentrale Aussage.