PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT

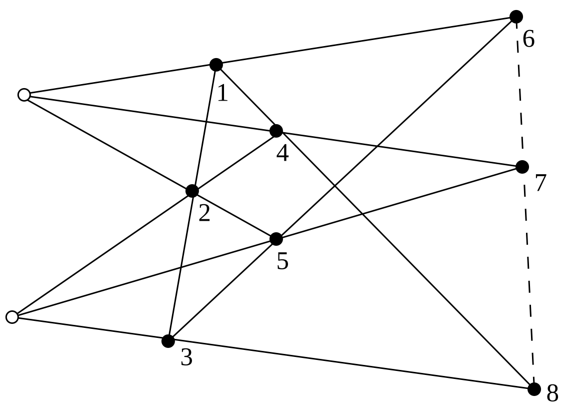
Projektive Geometrie (Wintersemester 06/07)

— Aufgabenblatt 9 (19. Dezember 2006) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 33. Automatisches Beweisen.
Satz des Désargues: Wenn sich für zwei Dreiecke in der Ebene $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt schneiden, dann liegen die Geradenschnittpunkte $(AB \cap A'B')$, $(BC \cap B'C')$ und $(AC \cap A'C')$ auf einer Geraden.

a) Zeigen Sie, dass der Satz des Désargues wie folgt formuliert werden kann:



Für alle Punkte $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ in $\mathbb{RP}^2$ gilt:
Sind die Punkte $1, 2, 3$ und $1, 4, 8$ und $3, 5, 6$ jeweils kollinear und gilt ausserdem, dass sich die drei Geraden (25), (47) und (16) sowie die drei Geraden (24), (57) und (83) jeweils in einem Punkt schneiden, dann sind auch die Punkte $6, 7, 8$ kollinear.

b) Formen Sie obige Inzidenzen passend in Bracket-Polynomgleichungen um, und leiten Sie aus diesen die Gültigkeit der folgenden Formel her:

$$[467][578] = [478][567].$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Umformung der Kollinearitäten 3-summandige GP-Relationen, bei denen zusätzlich ein weiterer Term durch die geforderte Kollinearität zu Null wird. Zur Umformung des gemeinsamen Schnittpunktes von drei Geraden verwenden Sie die Formel aus der Vorlesung mit der in der Aufgabe angegebenen Reihenfolge der Punktepaare.

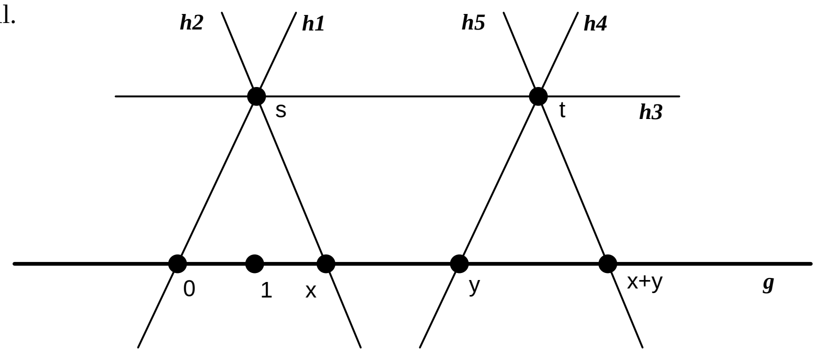
c) Vollenden Sie den Beweis des Satzes von Désargues, indem Sie aus der o.g. Formel die Kollinearität der Punkte $6, 7, 8$ folgern.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 34. Quadsets.
Gegeben sei eine Gerade g mit den ausgezeichneten Punkten Null und Eins. Dann lässt sich für zwei beliebige Punkte x und y auf g deren Addition und Multiplikation wie folgt definieren:

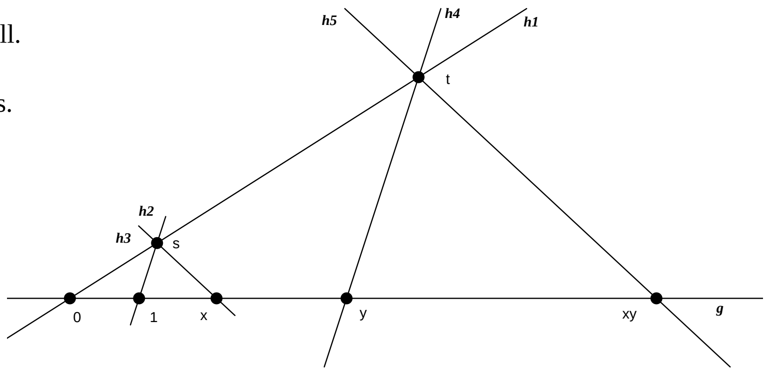
<u>ADDITION:</u>

- Zeichne eine beliebige Gerade h_1 durch Null.
- Wähle auf h_1 einen beliebigen Punkt s und zeichne die Gerade h_2 durch s und x.
- Zeichne die Parallele h_3 zu g durch s.
- Zeichne die Parallele h_4 zu h_1 durch y. Der Schnitt von h_3 mit h_4 liefert den (Schnitt-)Punkt t.
- Zeichne die Parallele h_5 zu h_2 durch t. Der Schnitt von h_5 mit g liefert dann den gesuchten Punkt $x + y$.



<u>MUTLIPLIKATION:</u>

- Zeichne eine beliebige Gerade h_1 durch Null.
- Wähle auf h_1 einen beliebigen Punkt s und zeichne die Gerade h_2 durch s und Eins.
- Zeichne die Gerade h_3 durch s und x.
- Zeichne die Parallele h_4 zu h_2 durch y. Der Schnitt von h_1 mit h_4 liefert den (Schnitt-)Punkt t.
- Zeichne die Parallele h_5 zu h_3 durch t. Der Schnitt von h_5 mit g liefert dann den gesuchten Punkt $x \cdot y$.



a) Sei ∞ der Punkt im Unendlichen auf der Geraden g. Zeigen Sie rechnerisch, dass dann

$$(0, x+y \mid x, y \mid \infty, \infty) \quad \text{und} \quad (0, \infty \mid 1, x \cdot y \mid x, y)$$

jeweils ein Quadset bilden.
(Hinweis: Betrachten Sie dazu die Punkte 0, 1, x, y, $x+y$ (bzw. $x \cdot y$) und ∞) in homogenen Koordinaten.)

b) *Warum* bilden die oben genannten Sequenzen Quadsets bzw.: Wie ist erkennbar, wie die Punktepaare zu wählen sind ?
(Hinweis: Betrachten Sie hierzu die sechs Geraden h_1 bis h_5 und die Gerade im Unendlichen h_∞.)