TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

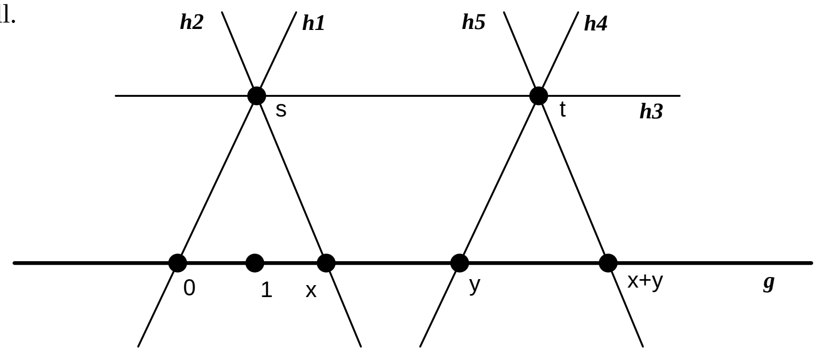
Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Lösungen zu Aufgabenblatt 8 (22. Juni 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 32. Quadsets.
Gegeben sei eine Gerade g mit den ausgezeichneten Punkten Null und Eins. Dann lässt sich für zwei beliebige Punkte x und y auf g deren Addition und Multiplikation wie folgt definieren:

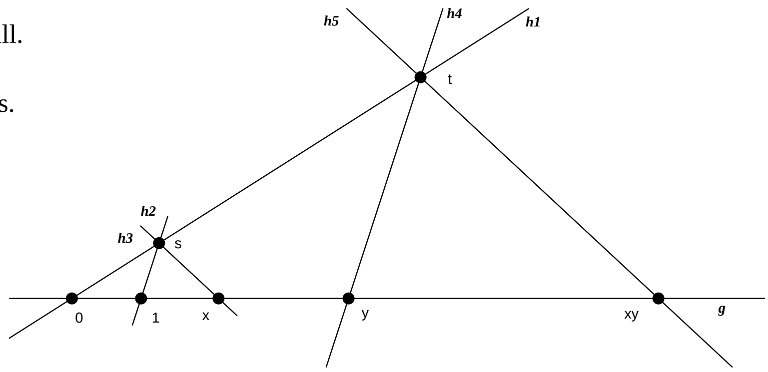
<u>ADDITION:</u>

- Zeichne eine beliebige Gerade h_1 durch Null.
- Wähle auf h_1 einen beliebigen Punkt s und zeichne die Gerade h_2 durch s und x.
- Zeichne die Parallele h_3 zu g durch s.
- Zeichne die Parallele h_4 zu h_1 durch y. Der Schnitt von h_3 mit h_4 liefert den (Schnitt-)Punkt t.
- Zeichne die Parallele h_5 zu h_2 durch t. Der Schnitt von h_5 mit g liefert dann den gesuchten Punkt $x + y$.



<u>MUTLIPLIKATION:</u>

- Zeichne eine beliebige Gerade h_1 durch Null.
- Wähle auf h_1 einen beliebigen Punkt s und zeichne die Gerade h_2 durch s und Eins.
- Zeichne die Gerade h_3 durch s und x.
- Zeichne die Parallele h_4 zu h_2 durch y. Der Schnitt von h_1 mit h_4 liefert den (Schnitt-)Punkt t.
- Zeichne die Parallele h_5 zu h_3 durch t. Der Schnitt von h_5 mit g liefert dann den gesuchten Punkt $x \cdot y$.



a) Sei ∞ der Punkt im Unendlichen auf der Geraden g. Zeigen Sie rechnerisch, dass dann

$$(0, x + y \ | \ x, y \ | \ \infty, \infty) \quad \text{und} \quad (0, \infty \ | \ 1, x \cdot y \ | \ x, y)$$

jeweils ein Quadset bilden.
(Hinweis: Betrachten Sie dazu die Punkte 0, 1, x, y, $x + y$ (bzw. $x \cdot y$) und ∞) in homogenen Koordinaten.)

b) *Warum* bilden die oben genannten Sequenzen Quadsets bzw.: Wie ist erkennbar, wie die Punktepaare zu wählen sind ?
(Hinweis: Betrachten Sie hierzu die sechs Geraden h_1 bis h_5 und die Gerade im Unendlichen h_∞.)

<u>LÖSUNG:</u>

a) Sechs Punkte $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{RP}^1$ bilden ein Quadset $(ad|be|cf)$, wenn gilt: $[ae][bf][cd] = [af][bd][ce]$.
Dies ist (für $[af][bd][ce] \neq 0$) äquivalent zu $\frac{[ae][bf][cd]}{[af][bd][ce]} = 1$.

Somit bilden $(0, x+y \mid x, y \mid \infty, \infty)$ ein Quadset, denn:

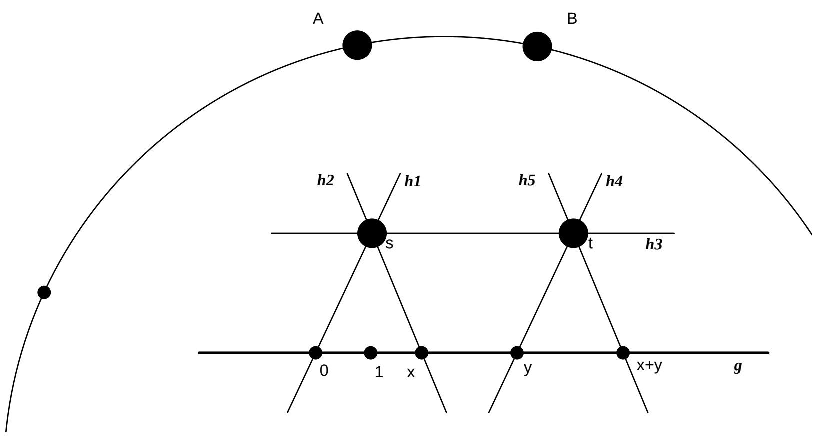
$$\frac{\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+y\\1\end{pmatrix}\right]}{\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+y\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}\right]} = \frac{(-y)\cdot(-1)\cdot 1}{(-1)\cdot(-y)\cdot 1} = 1$$

Somit bilden $(0, \infty \mid 1, x \cdot y \mid x, y)$ ein Quadset, denn:

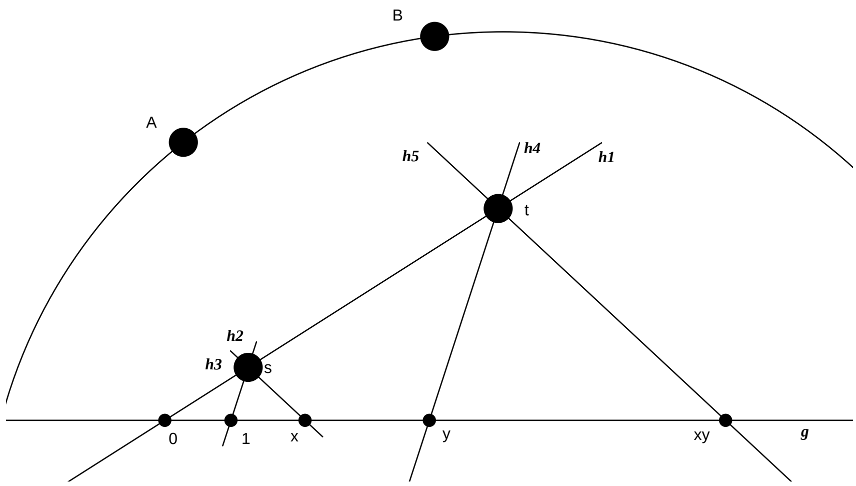
$$\frac{\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}xy\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]}{\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}xy\\1\end{pmatrix}\right]} = \frac{(-xy)\cdot(1-y)\cdot(-1)}{(-y)\cdot(-1)\cdot(x-xy)} = 1$$

b) Wähle in beiden Fällen die Konstruktion „4 Punkte $\longrightarrow$ 6 Geraden“. Die vier Punkte sind jeweils die Punkte A, B, s und t, die 6 Geraden sind dann h_1 bis h_5 und die Gerade im Unendlichen. Die Gerade g entspricht der Schnittgeraden durch die 6 Geraden (siehe Zeichnungen).

ADDITION: Punkt A sei der Schnittpunkt der beiden Geraden h_2 und h_5 und Punkt B der Schnittpunkt der beiden Geraden h_1 und h_4. Die Gerade h_3 schneidet die Gerade im Unendlichen h_∞ in einem Punkt im Unendlichen ∞, durch den auch die Gerade g verläuft. (Die Geradenpaare (h_2, h_4) und (h_3, h_∞) bilden die gegenüberliegenden „Seiten“ des Vierecks (A, B, s, t), die beiden Geraden h_1 und h_5 seine „Diagonalen“.)



MULTIPLIKATION: Punkt A sei der Schnittpunkt der beiden Geraden h_3 und h_5 und Punkt B der Schnittpunkt der beiden Geraden h_2 und h_4. Die Gerade h_1 schneidet die Gerade im Unendlichen h_∞ in einem Punkt im Unendlichen ∞. (Die Geradenpaare (h_3, h_4) und (h_1, h_∞) bilden die gegenüberliegenden „Seiten“ des Vierecks (A, B, s, t), die beiden Geraden h_2 und h_5 seine „Diagonalen“.)



Aufgabe 33. Dualität.
Gegeben seien n Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mit homogenen Koordinaten $p_i = (x_i, y_i, z_i)$. Alle diese Punkte sollen auf dem Kegelschnitt liegen, der durch die 3×3-Matrix A beschrieben wird, d.h. es gilt $p_i^T A p_i = 0$ für alle i.
Fasst man die homogenen Koordinaten der Punkte p_i nun als homogene Koordinaten von Geraden l_i auf, so sind diese Geraden Tangenten an einen Kegelschnitt.

a) Bestimmen Sie diesen dualen Kegelschnitt für die folgenden 3 Kegelschnitte:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Welche Matrix beschreibt den dualen Kegelschnitt im allgemeinen ?

LÖSUNG:
Wir leiten zuerst die allgemeine Formel her und wenden diese dann konkret an:

b) Gegeben: Kegelschnitt A und n Punkte $p_1, \ldots, p_n$, die auf diesem Kegelschnitt liegen.
$\iff p_i^T A p_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Das duale Bild der Punkte p_i sind die Geraden $li_= p_i^*$

Gesucht: Dualer Kegelschnitt $\tilde{A}$, der alle Geraden l_i als Tangenten besitzt.

Allgemeine Form einer Tangenten t an einen Kegelschnitt A durch einen Punkt p: $t = Ap$.

Ist also l_i eine Tangente an den dualen Kegelschnitt $\tilde{A}$, so berührt sie den Kegelschnitt $\tilde{A}$ gerade im Punkt $\tilde{p_i} = \tilde{A}^{-1} l_i$.

Also gesucht: Kegelschnitt $\tilde{A}$ mit

$$\tilde{p_i}^T \tilde{A} \tilde{p_i} = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \iff p_i^T A p_i = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

Nun gilt aber (mit $\tilde{A}^T = \tilde{A}$)

$$\tilde{p_i}^T \tilde{A} \tilde{p_i} = (\tilde{A}^{-1} l_i)^T \tilde{A} (\tilde{A}^{-1} l_i) = l_i^T (\tilde{A}^{-1})^T \tilde{A} \tilde{A}^{-1} l_i = l_i^T \tilde{A}^{-1} l_i = p_i^T \tilde{A}^{-1} p_i$$

Also gesucht: Kegelschnitt $\tilde{A}$ mit

$$p_i^T \tilde{A}^{-1} p_i = 0 \iff p_i^T A p_i = 0$$

Weil obige Äquivalenz erfüllt sein muss, folgt somit

$$\tilde{A}^{-1} = A \qquad \text{und somit} \qquad \tilde{A} = A^{-1}.$$

Die allgemeine Formel für den dualen Kegelschnitt M^* eines Kegelschnittes M wurde in der Vorlesung angegeben und lautet: $M^* = M^{-1}$ bzw. $M^* = M^{\triangle}$, wobei $M^{\triangle}$ die adjungierte Matrix (den Adjoint) von M bezeichne.

a) Die dualen Kegelschnitte zu den Kegelschnitten A_1 bis A_3 lauten:

$$A_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2^* = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -ab \end{pmatrix} \qquad A_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— Hausaufgaben —

Aufgabe 34. Kegelschnitte und Tangenten.
Gegeben sei ein Kegelschnitt $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0\}$. Er lässt sich auch durch die Gleichung in Matrixform

$$(x, y, z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

beschreiben, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix}.$$

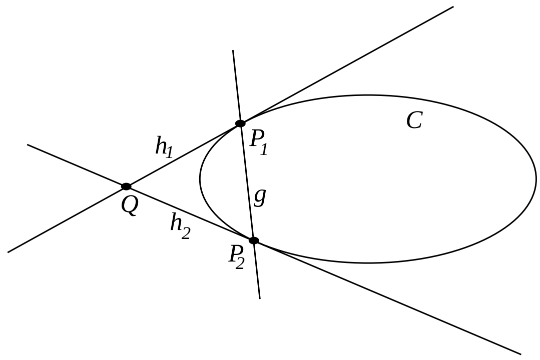
a) Zeigen Sie, dass $h = (x_0, y_0, z_0) \cdot A$ die Tangente an einen Punkt (x_0, y_0, z_0) auf C ist. Erinnern Sie sich hierzu an das, was Sie in Analysis gelernt haben: Die Ableitung der Funktion

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist eine lineare Approximation von f. Was bedeutet dies für die Tangentengleichung?

b) Finden Sie zu einer gegebenen Gleichung einer Tangente h an C den gemeinsamen Punkt (x_0, y_0, z_0).

c) Betrachten Sie folgende Konstruktion:



Gegeben sei ein Kegelschnitt C und eine Gerade $g = (g_x, g_y, g_z)$, die C in zwei Punkten P_1 und P_2 schneidet. Es seien h_1 und h_2 die jeweiligen Tangenten an C in P_1 und P_2. Sie schneiden sich in einem Punkt Q. Was ist Q in Abhängigkeit von g (geschlossene Form)?

d) Für die Umkehrung der Konstruktion in Aufgabenteil c) (C und Q gegeben, Tangenten h_1 und h_2 konstruieren, g ist die Verbindungsgerade von P_1 und P_2, den Schnittpunkten der Tangenten mit C), was ist g in Abhängigkeit von Q?

LÖSUNG:

a) Für $f(x, y, z) = ax^2 + by^+ cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz$ ist für $p = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(p_x, p_y, p_z) &= 2ap_x + 2dp_y + 2ep_z \\
\frac{\partial f}{\partial y}(p_x, p_y, p_z) &= 2dp_x + 2bp_y + 2fp_z \\
\frac{\partial f}{\partial y}(p_x, p_y, p_z) &= 2ep_x + 2fp_y + 2cp_z.
\end{aligned}$$

Demnach ist die Tangente h an einen Punkt $p = (x_0, y_0, z_0)$

$$h = Ap = p^T A$$

(Die Matrix A ist symmetrisch, und skalare Vielfache interessieren bei homogenen Koordinaten nicht.)

b) Unter Benutzung von Teilaufgabe a) folgern wir für den Berührpunkt $p = (x_0, y_0, z_0)$ einer Tangenten h an den Kegelschnitt C:

$$p = A^{-1}h$$

c) Nach Aufgabenteil a) gilt für die beiden Tangenten h_1 bzw. h_2 an den Kegelschnitt C durch die Punkte P_1 bzw. P_2

$$h_1 = AP_1 \text{ und } h_2 = AP_2$$

Da Q auf beiden Geraden liegen soll (er ist der Schnittpunkt), muss gelten:

$$< h_1, Q >=< AP_1, Q >= (AP_1)^T Q = 0 \quad \text{und} \quad < h_2, Q >=< AP_2, Q > (AP_2)^T Q = 0$$

bzw. durch Umstellen

$$< Q, h_1 >= (AQ)^T P_1 = 0 =< AQ, P_1 > \quad \text{und} \quad < Q, h_2 >= (AQ)^T P_2 = 0 =< AQ, P_2 >$$

Also ist AQ eine Gerade, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht. Das ist aber gerade die Gerade g. Also ist

$$Q = A^{-1} g$$

d) Mit Aufgabenteil c) folgt

$$g = AQ$$

(**Bemerkung:** Welcher Zusammenhang besteht zu Aufgabenteil a) und b)?)

Aufgabe 35. Kreis als Kegelschnitt, der I und J enthält.
Ein allgemeiner Kreis in der projektiven Ebene ist durch

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 = 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

gegeben.

a) Warum ist dies ein Kreis ?

b) Zeigen Sie weiterhin, dass die Kreise mit o.g. Kreisgleichungen genau die Kegelschnitte sind, die $\mathtt{I} = (-i, 1, 0)$ und $\mathtt{J} = (i, 1, 0)$ enthalten.

Aus dieser Tatsache wird ansatzweise klar, dass die euklidische Geometrie allein mit den Methoden der Inzidenzgeometrie unter Zuhilfenahme der Punkte I und J aufgebaut werden kann.

LÖSUNG:

a) Die allgemeine Kreisgleichung eines Kreises in $\mathbb{R}^2$ lautet:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. An dieser Gleichung lassen sich sofort der Mittelpunkt $M = (a, b)$ und der Radius r ablesen.

Die Gleichung für C lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} C(x, y, z) &= x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 \\ &= (x - (-\tfrac{\alpha}{2})z)^2 + (y - (-\tfrac{\beta}{2})z)^2 - (\tfrac{\alpha^2}{4} + \tfrac{\beta^2}{4} - \gamma)z^2 \end{aligned}$$

Wird diese Gleichnug dehomogeniesiert ($z = 1$ einsetzen), so ist sofort ersichtlich, dass C in $\mathbb{R}^2$ den Kreis um den Mittelpunkt $M = (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ mit Radius $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$ beschreibt.

b) Es ist klar, dass I und J die Kreisgleichung erfüllen.

Ein allgemeiner Kegelschnitt in der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ wird durch

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{RP}^2 | ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0\}$$

beschrieben.

Wenn die Punkte I und J auf einem Kegelschnitt liegen, so ergibt sich durch Einsetzen von I und J in die Kegelschnittgleichung, dass $-a + b - di = 0$ und $-a + b + di = 0$ gelten muss, woraus folgt, dass

$$a = b \text{ und } d = 0$$

erfüllt sein muss.

Für $a \neq 0$ reduziert sich die Kegelschnittgleichung dann zu

$$x^2 + y^2 + \frac{e}{a}xz + \frac{f}{a}yz + \frac{c}{a}z^2 \quad ,$$

was - wie oben gezeigt - gerade einer Kreisgleichung entspricht (mit $\alpha = \frac{e}{a}$, $\beta = \frac{f}{a}$, $\gamma = \frac{c}{a}$).

Für $a = b = 0$ ergibt sich eine Gerade, aber eine Gerade ist ja nichts anderes als ein grosser, grosser Kreis ...

Bemerkung: Zum allgemeinen Kegelschnitt

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}P^2 | ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0\}$$

gehört die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} \quad .$$

Wenn der Kegelschnitt $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ enthält, ist er ein Kreis ($a = b$ und $d = 0$). Somit wird die Matrix A zu

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \frac{e}{2} \\ 0 & a & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} \quad .$$

Für die Tangente $t_{\mathtt{I}}$ an C durch $\mathtt{I}$ gilt somit

$$t_{\mathtt{I}} = A \cdot \mathtt{I} = \begin{pmatrix} -ia \\ a \\ -i\frac{e}{2} + \frac{f}{2} \end{pmatrix}$$

und für die Tangente $t_{\mathtt{J}}$ an C durch $\mathtt{J}$ gilt

$$t_{\mathtt{J}} = A \cdot \mathtt{J} = \begin{pmatrix} ia \\ a \\ i\frac{e}{2} + \frac{f}{2} \end{pmatrix}$$

Deren Schnittpunkt ist gerade ihr Kreuzprodukt $t_{\mathtt{I}} \times t_{\mathtt{J}} = -2a^2 i \ \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{a}\ ,\ -\frac{1}{2} \cdot \frac{f}{a}\ ,\ 1\right)$.

Das ist (wie oben in Teilaufgabe b) gesehen) der Mittelpunkt $M = (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ von C.