TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Lösungen zu Aufgabenblatt 7 (15. Juni 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 28. Dreiterm-Grassmann-Plücker-Relationen.
Folgern Sie aus den allgemeinen Grassmann-Plücker-Relationen für Dimension d-1 bzw. Rang d

$$G_{\tau,\lambda} = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i \cdot [\tau_1, \ldots, \tau_{d-1}, \lambda_i,] \cdot [\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{d+1}] = 0$$

folgende Dreiterm-Grassmann-Plücker-Relationen in Rang 3:

$$[t, a, b][t, c, d] - [t, a, c][t, b, d] + [t, a, d][t, b, c] = 0.$$

LÖSUNG:

Es ist $n = 5$, $dim = 3$ und somit $rang = 2$. Betrachte $\{a\ t\ b\ c\ d\}$ (statt $\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\}$).
Wähle $\tau = \{\tau_1,\ \tau_2\} = \{t,\ a\} \in E^{d-1} = E^2$ und $\mu = \{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4\} = \{t,\ b,\ c,\ d\} \in E^{d+1} = E^4$.
Dann ist

$$G_{\tau,\lambda} = -\underbrace{[tat]}_{=0}[bcd] + [tab][tcd] - [tac][tbd] + [tad][tbc] = 0.$$

Aufgabe 29. Beweis der Grassmann-Plücker-Relationen.
Zeigen Sie die Grassmann-Plücker-Relationen für Rang 3

$$[123][456] - [124][356] + [134][256] - [234][156] = 0$$

für den Fall, dass $[456]$, $[356]$, $[256]$ und $[156]$ alle $\neq 0$ sind. Gehen Sie für den Beweis nach folgenden Schritten vor:

a) Warum kann man sich bei dem Beweis auf den Fall beschränken, dass $[156] = [256] = [356] = [456] = 1$?

b) Warum kann man annehmen, dass die Koordinaten der Punkte 1 bis 6 durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben sind?

c) Bestimmen Sie die jetzige Form der nachzuweisenden Grassmann-Plücker-Relationen und interpretieren Sie die Punkte $1, \ldots, 4$ als Punkte in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie nun die Grassmann-Plücker-Relationen durch ein Volumenargument.

LÖSUNG:

Die in der Aufgabe angegebene Grassmann-Plücker-Relation entsteht durch die Wahl von $\tau = \{5, 6\}$ und $\mu = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Die Beschränkung

$$[123][456] - [124][356] + [134][256] - [234][156] = 0$$

entspricht einer Skalierung der Vektoren $1, 2, 3, 4$ die an der Gültigkeit der Grassmann-Plücker-Relation nichts ändert, da jeder Term in $1, 2, 3, 4$ linear ist.

b) Die Darstellung der Koordinaten durch die angegebene Matrix entspricht einem Basiswechsel, so dass $5, 6$ die Einheitsvektoren werden. Dies kommt einer Multiplikation aller Determinanten mit der Determinante des Basiswechels gleich, also dem Ausklammern eines gemeinsamen Faktors ($|A|^2$, wenn A der Basiswechsel ist) in der Grassmann-Plücker-Relation. Durch anschliessendes Skalieren ändert sich die Grassmann-Plücker-Relation nicht.

c) Die zu beweisende Relation lautet mit diesen speziellen Koordinaten:

$$[123] - [124] + [134] - [234] = 0.$$

Die Vektoren 1 bis 4 werden nun als Punkte im $\mathbb{R}^2$ aufgefasst, dann berechnen die oben genannten Brackets gerade jeweils den halben Flächeninhalt der zugehörigen Dreiecke.

Fallunterscheidung:
FALL 1: Die vier Punkte liegen in konvexer Lage. Dann bedeutet die Relation (ohne den Faktor $\frac{1}{2}$)

$$F(123) + F(134) = F(124) + F(234),$$

wobei auf beiden Seiten der Flächeninhalt des Viereckes (1234) steht. Diese Gleichung gilt immer.

FALL 2: Die vier Punkte liegen *nicht* in konvexer Lage. Sei in diesem Fall o.B.d.A. Punkt 4 im Innern der Punkte 1 bis 3, dann ist die Relation gleichbedeutend mit

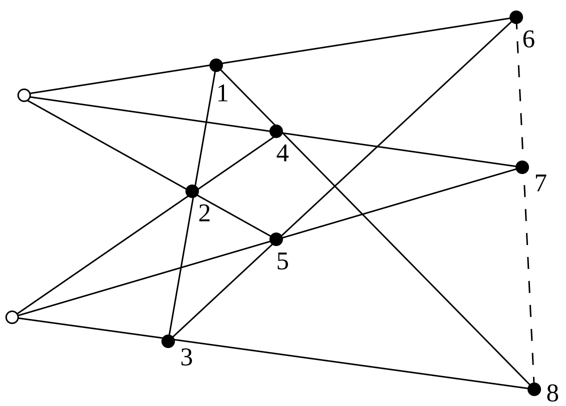
$$F(123) = F(134) + F(124) + F(234).$$

Und auch diese Gleichung gilt immer.

— Hausaufgaben —

Aufgabe 30. Automatisches Beweisen.
Satz des Désargues: Wenn sich für zwei Dreiecke in der Ebene $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt schneiden, dann liegen die Geradenschnittpunkte $(AB \cap A'B')$, $(BC \cap B'C')$ und $(AC \cap A'C')$ auf einer Geraden.

a) Zeigen Sie, dass der Satz des Désargues wie folgt formuliert werden kann:



Für alle Punkte $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ in $\mathbb{RP}^2$ gilt:
Sind die Punkte $1, 2, 3$ und $1, 4, 8$ und $3, 5, 6$ jeweils kollinear und gilt ausserdem, dass sich die drei Geraden (25), (47) und (16) sowie die drei Geraden (24), (57) und (83) jeweils in einem Punkt schneiden, dann sind auch die Punkte $6, 7, 8$ kollinear.

b) Formen Sie obige Inzidenzen passend in Bracket-Polynomgleichungen um, und leiten Sie aus diesen die Gültigkeit der folgenden Formel her:

$$[467][578] = [478][567].$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Umformung der Kollinearitäten 3-summandige GP-Relationen, bei denen zusätzlich ein weiterer Term durch die geforderte Kollinearität zu Null wird. Zur Umformung des gemeinsamen Schnittpunktes von drei Geraden verwenden Sie die Formel aus der Vorlesung mit der in der Aufgabe angegebenen Reihenfolge der Punktepaare.

c) Vollenden Sie den Beweis des Satzes von Désargues, indem Sie aus der o.g. Formel die Kollinearität der Punkte $6, 7, 8$ folgern.

LÖSUNG:

a) Wir identifizieren Punkt 1 mit Punkt B, Punkt 4 mit Punkt C und den Schnittpunkt der beiden Geraden (16) und (47) mit Punkt A, Punkt 5 mit Punkt A', Punkt 3 mit Punkt B' und den Schnittpunkt der beiden Geraden (24) und (57) mit C'. Mit dieser Zuordnung ist die Äquivalenz des Satzes von Désargues und der Aussage in Inzidenzprädikaten leicht nachzuprüfen.

b) $[123] = 0$: GP-Relation mit $\tau = \{1, 2\}$ und $\mu = \{2, 3, 4, 5\}$:
$$[122][345] - [123][245] + [124][235] - [125][234] = 0 \Longrightarrow [124][235] = [125][234]$$

$[148] = 0$: GP-Relation mit $\tau = \{1, 4\}$ und $\mu = \{2, 4, 7, 8\}$:
$$[142][478] - [144][278] + [147][248] - [148][247] = 0 \Longrightarrow [147][248] = [124][478]$$

$[356] = 0$: GP-Relation mit $\tau = \{2, 5\}$ und $\mu = \{3, 5, 6, 7\}$:
$$[253][567] - [255][367] + [256][357] - [257][356] = 0 \Longrightarrow [256][357] = [235][567]$$

Schnitt $(25)(47)(16)$: $[251][476] - [256][471] = 0 \Longrightarrow [125][467] = -[147][256]$

Schnitt $(24)(57)(83)$: $[248][573] + [243][578] = 0 \Longrightarrow [234][578] = -[248][357]$

Nun gilt:

$$[123] = 0 \Longrightarrow [124] \neq 0, [125] \neq 0, [234] \neq 0$$
$$[356] = 0 \Longrightarrow [235] \neq 0, [256] \neq 0, [357] \neq 0$$
$$[148] = 0 \Longrightarrow [147] \neq 0, [248] \neq 0$$

Demzufolge ergibt Ausmultiplizieren der (jeweils letzten) Gleichungen und Kürzen der oben aufgefürhten Brackets auf beiden Seiten die gesuchte Gleichung

$$[467][578] = [478][567]$$

c) Eine Dreiterm-Grassmann-Plücker-Relation (mit $\tau = \{7, 4\}$ und $\mu = \{5, 6, 7, 8\}$) lautet:

$$[745][678] - [746][578] + [747][568] - [748][567] = [457][678] - [467][578] + [478][567] = 0$$

Da aber die Summe der letzten beiden Terme nach Aufgabenteil b) gleich Null ist, aber $[457] \neq 0$ (wegen $1, 4, 7$ nicht kollinear), muss $[678] = 0$ gelten.

Aufgabe 31. Von Determinanten zu Punkten.
Gegeben sei eine Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^{3 \cdot 6} \to \mathbb{R}^{\binom{6}{3}}$ durch folgende Werte:

$$\begin{array}{rrcrr}
\Gamma(123) = & 2 & \quad & \Gamma(135) = & 17 \\
\Gamma(124) = & -4 & & \Gamma(136) = & 18 \\
\Gamma(125) = & 5 & & \Gamma(234) = & -20 \\
\Gamma(126) = & 6 & & \Gamma(235) = & 9 \\
\Gamma(134) = & -34 & & \Gamma(236) = & 8
\end{array}$$

a) Bestimmen Sie die übrigen Werte der Funktion Γ, so dass Γ alle Grassmann-Plücker-Relationen erfüllt.

b) Finden Sie eine Punktkonfiguration $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ mit $\Gamma(P) = \Gamma$.

LÖSUNG:

a) Wähle solche (Dreiterm-)Grassmann-Plücker-Relationen, in denen alle Brackets bis auf eines bereits gegeben sind. Nach diesem einen Bracket wird die Grassmann-Plücker-Relation dann aufgelöst:

GP-Relation mit $\tau = \{1,2\}, \mu = \{1,3,4,5\}$ liefert $[145] = 51$.
GP-Relation mit $\tau = \{1,2\}, \mu = \{1,3,4,6\}$ liefert $[146] = 66$.
GP-Relation mit $\tau = \{1,2\}, \mu = \{1,3,5,6\}$ liefert $[156] = -6$.

GP-Relation mit $\tau = \{1,3\}, \mu = \{2,3,4,5\}$ liefert $[345] = 17$.
GP-Relation mit $\tau = \{1,3\}, \mu = \{2,3,4,6\}$ liefert $[346] = 44$.
GP-Relation mit $\tau = \{1,3\}, \mu = \{2,3,5,6\}$ liefert $[356] = -13$.

GP-Relation mit $\tau = \{2,3\}, \mu = \{1,2,4,5\}$ liefert $[245] = 32$.
GP-Relation mit $\tau = \{2,3\}, \mu = \{1,2,4,6\}$ liefert $[246] = 44$.
GP-Relation mit $\tau = \{2,3\}, \mu = \{1,2,5,6\}$ liefert $[256] = -7$.

GP-Relation mit $\tau = \{1,2\}, \mu = \{3,4,5,6\}$ liefert $[456] = -33$.

b) Das Verfahren aus der Vorlesung funktionierte wie folgt:

Sei o.B.d.A. $\Gamma(123) = 1$. Sei weiterhin o.B.d.A. $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Gamma(23\mathbf{4}) & \dots & \Gamma(23\boldsymbol{n}) \\ 0 & 1 & 0 & -\Gamma(13\mathbf{4}) & \dots & -\Gamma(13\boldsymbol{n}) \\ 0 & 0 & 1 & \Gamma(12\mathbf{4}) & \dots & \Gamma(12\boldsymbol{n}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{denn}\quad \Gamma(234) &\overset{!}{=} [234] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4_1 \\ 1 & 0 & 4_2 \\ 0 & 1 & 4_3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 4_1 \\ 1 & 4_3 \end{vmatrix} = 4_1 \\
\Gamma(134) &\overset{!}{=} [134] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4_1 \\ 0 & 0 & 4_2 \\ 0 & 1 & 4_3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 4_2 \\ 1 & 4_3 \end{vmatrix} = -4_2 \\
\Gamma(124) &\overset{!}{=} [124] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4_1 \\ 0 & 1 & 4_2 \\ 0 & 0 & 4_3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4_2 \\ 0 & 4_3 \end{vmatrix} = 4_3
\end{aligned}$$

Umsetzung des Verfahrens auf die in dieser Aufgabestellung gesuchte Punktkonfiguration:

Es ist $\Gamma(123) = 2$. Teile also alle Γ-Werte durch $\Gamma(123) = 2$ und wende anschliessend obiges Verfahren an.

Dieses liefert dann 6 Vektoren $p'_1, p'_2, \dots, p'_6$ mit $[p'_1 p'_2 p'_3] = \frac{\Gamma(123)}{\Gamma(123)} = 1$ und $[p'_i p'_j p'_k] = \frac{\Gamma(ijk)}{\Gamma(123)} = \frac{1}{2}\Gamma(ijk)$.

Skaliere also jeden Vektor p'_i mit $\sqrt[3]{2}$, denn

$$[\sqrt[3]{2}p'_1\, \sqrt[3]{2}p'_2\, \sqrt[3]{2}p'_3] = (\sqrt[3]{2})^3 [p'_1 p'_2 p'_3] = 2[p'_1 p'_2 p'_3] = 2\frac{1}{2}[p_1 p_2 p_3] = \Gamma(ijk)$$

Somit ergibt sich

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$p_4 = \sqrt[3]{2}\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma(234) \\ -\Gamma(134) \\ \Gamma(124) \end{pmatrix},\ p_5 = \sqrt[3]{2}\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma(235) \\ -\Gamma(135) \\ \Gamma(125) \end{pmatrix},\ p_6 = \sqrt[3]{2}\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \Gamma(236) \\ -\Gamma(136) \\ \Gamma(126) \end{pmatrix}.$$