TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Aufgabenblatt 7 (15. Juni 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 28. Dreiterm-Grassmann-Plücker-Relationen.
Folgern Sie aus den allgemeinen Grassmann-Plücker-Relationen für Dimension d-1 bzw. Rang d

$$G_{\tau,\lambda} = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i \cdot [\tau_1, \dots, \tau_{d-1}, \lambda_i,] \cdot [\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{d+1}] = 0$$

folgende Dreiterm-Grassmann-Plücker-Relationen in Rang 3:

$$[t, a, b][t, c, d] - [t, a, c][t, b, d] + [t, a, d][t, b, c] = 0.$$

Aufgabe 29. Beweis der Grassmann-Plücker-Relationen.
Zeigen Sie die Grassmann-Plücker-Relationen für Rang 3

$$[123][456] - [124][356] + [134][256] - [234][156] = 0$$

für den Fall, dass $[456]$, $[356]$, $[256]$ und $[156]$ alle $\neq 0$ sind. Gehen Sie für den Beweis nach folgenden Schritten vor:

a) Warum kann man sich bei dem Beweis auf den Fall beschränken, dass $[156] = [256] = [356] = [456] = 1$?

b) Warum kann man annehmen, dass die Koordinaten der Punkte 1 bis 6 durch die Matrix

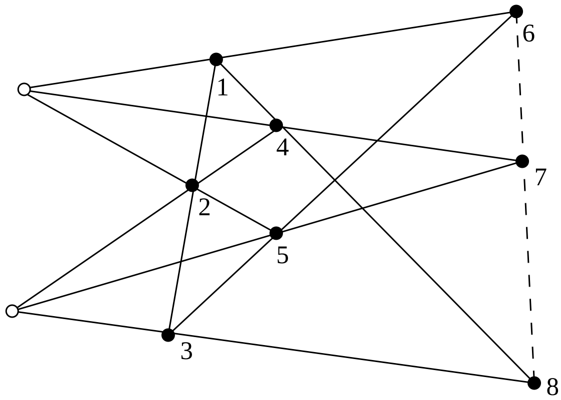
$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben sind?

c) Bestimmen Sie die jetzige Form der nachzuweisenden Grassmann-Plücker-Relationen und interpretieren Sie die Punkte $1, \dots, 4$ als Punkte in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie nun die Grassmann-Plücker-Relationen durch ein Volumenargument.

Aufgabe 30. Automatisches Beweisen.
Satz des Désargues: Wenn sich für zwei Dreiecke in der Ebene $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ die Geraden AA', BB' und CC' in einem Punkt schneiden, dann liegen die Geradenschnittpunkte $(AB \cap A'B')$, $(BC \cap B'C')$ und $(AC \cap A'C')$ auf einer Geraden.

a) Zeigen Sie, dass der Satz des Désargues wie folgt formuliert werden kann:



Für alle Punkte $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ in $\mathbb{RP}^2$ gilt:
Sind die Punkte $1, 2, 3$ und $1, 4, 8$ und $3, 5, 6$ jeweils kollinear und gilt ausserdem, dass sich die drei Geraden (25), (47) und (16) sowie die drei Geraden (24), (57) und (83) jeweils in einem Punkt schneiden, dann sind auch die Punkte $6, 7, 8$ kollinear.

b) Formen Sie obige Inzidenzen passend in Bracket-Polynomgleichungen um, und leiten Sie aus diesen die Gültigkeit der folgenden Formel her:

$$[467][578] = [478][567].$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Umformung der Kollinearitäten 3-summandige GP-Relationen, bei denen zusätzlich ein weiterer Term durch die geforderte Kollinearität zu Null wird. Zur Umformung des gemeinsamen Schnittpunktes von drei Geraden verwenden Sie die Formel aus der Vorlesung mit der in der Aufgabe angegebenen Reihenfolge der Punktepaare.

c) Vollenden Sie den Beweis des Satzes von Désargues, indem Sie aus der o.g. Formel die Kollinearität der Punkte $6, 7, 8$ folgern.

Aufgabe 31. Von Determinanten zu Punkten.
Gegeben sei eine Funktion $\Gamma : \mathbb{R}^{3 \cdot 6} \to \mathbb{R}^{\binom{6}{3}}$ durch folgende Werte:

$$\begin{aligned}
\Gamma(123) &= 2 & \qquad \Gamma(135) &= 17\\
\Gamma(124) &= -4 & \Gamma(136) &= 18\\
\Gamma(125) &= 5 & \Gamma(234) &= -20\\
\Gamma(126) &= 6 & \Gamma(235) &= 9\\
\Gamma(134) &= -34 & \Gamma(236) &= 8
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die übrigen Werte der Funktion Γ, so dass Γ alle Grassmann-Plücker-Relationen erfüllt.

b) Finden Sie eine Punktkonfiguration $P = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \in \mathbb{R}^{3\times 6}$ mit $\Gamma(P) = \Gamma$.