TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Lösungen zu Aufgabenblatt 6 (8. Juni 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 26. Doppelverhältnisse und Kegelschnitte.

a) Gegeben sei eine projektive Gerade. Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^1$ auf der projektiven Geraden das Doppelverhältnis $(A, B; C, D) = \frac{3}{7}$ haben?

b) Gegeben sei eine projektive Gerade und fünf Punkte $A, B, C, D, E \in \mathbb{RP}^1$. Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ der vier Punkte A, B, C, D auf der projektiven Geraden gleich dem Doppelverhältnis $(A, C; D, E)$ der vier Punkte A, C, D, E ist?

c) Das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C, D in der reellen projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist bezüglich eines weiteren Punktes $Z \in \mathbb{RP}^2$ mit $Z \notin \{A, B, C, D\}$ wie folgt definiert:

$$DV_X(A, B; C, D) = \frac{[XAC][XBD]}{[XBC][XAD]}$$

Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $DV_X(A, B; C, D)$ der vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ bezüglich eines Punktes $X \in \mathbb{RP}^2$, $X \notin \{A, B, C, D\}$ gleich dem Doppelverhältnis $DV_Y(A, B; C, D)$ der vier Punkte bezüglich eines weiteren Punktes $Y \in \mathbb{RP}^2$, $Y \notin \{A, B, C, D, X\}$ ist?

d) Für fünf voneinander verschiedene Punkte $X, A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ beschreibt die Menge

$$\{Y | DV_Y(A, B; C, D) = DV_X(A, B; C, D)\}$$

den eindeutig bestimmten Kegelschnitt durch diese fünf Punkte. Gibt es ein mulithomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass ein sechster Punkt ebenfalls auf diesem Kegelschnitt liegt?

e)* Auf einer Postkarte von München seien fünf markante Punkte zu sehen. Wie lässt sich mithilfe dieser fünf Punkte und einem guten Stadtplan von München ermitteln, wo der Photograph dieser Postkarte gestanden hat?

Hinweis: Man projeziere die fünf markanten Punkte der Postkarte auf eine Gerade und verwende Doppelverhältnisse und Kegelschnitte.

<u>LÖSUNG:</u>

Doppelverhältnisse und Kegelschnitte.

a) Ja, es gibt ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^1$ auf einer projektiven Geraden das Doppelverhältnis $(A, B; C, D) = \frac{3}{7}$ haben:

$$\begin{aligned} & DV(AB|CD) = \tfrac{3}{7} \\ \iff & \tfrac{[AC][BD]}{[AD][BC]} = \tfrac{3}{7} \\ \iff & 7[AC][BD] - 3[AD][BC] = 0 \end{aligned}$$

b) Ja, es gibt ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ der vier Punkte A, B, C, D auf einer projektiven Geraden gleich dem Doppelverhältnis $(A, C; D, E)$ der vier Punkte A, C, D, E ist:

$$
\begin{aligned}
& DV(AB|CD) = DV(AC|DE) \\
\iff & \frac{[AC][BD]}{[AD][BC]} = \frac{[AD][CE]}{[AE][CD]} \\
\iff & [AC][BD] \cdot [AE][CD] = [AD][CE] \cdot [AD][BC] \\
\iff & [AC][AE][BD][CD] - [AD]^2[BC][CE] = 0
\end{aligned}
$$

c) Ja, es gibt ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $DV_X(A,B;C,D)$ der vier Punkte $A,B,C,D \in \mathbb{RP}^2$ bezüglich eines Punktes $X \in \mathbb{RP}^2$, $X \notin \{A,B,C,D\}$ gleich dem Doppelverhältnis $DV_Y(A,B;C,D)$ der vier Punkte bezüglich eines weiteren Punktes $Y \in \mathbb{RP}^2$, $Y \notin \{A,B,C,D,X\}$ ist:

$$
\begin{aligned}
& DV_X(AB|CD) = DV_Y(AB|CD) \\
\iff & \frac{[XAC][XBD]}{[XAD][XBC]} = \frac{[YAC][YBD]}{[YAD][YBC]} \\
\iff & [XAC][XBD][YAD][YBC] - [YAC][YBD][XAD][XBC] = 0
\end{aligned}
$$

d) Ja, es gibt ein mulithomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass ein sechster Punkt ebenfalls auf einem (durch fünf Punkte bestimmten) Kegelschnitt liegt:

Verwende Aufgabenteil c): Die Formel aus Aufgabenteil c) beschreibt gerade, dass ein sechter Punkt Y auf dem durch die fünf Punkte A,B,C,D,E,X bestimmten Kegelschnitt liegt.

(**Bemerkung:** Vergleiche mit Aufgabe 13.)

e)* Die Position des Photographen lässt sich wie folgt ermitteln:

Schritt 1: Nimm eine Landkarte zur Hand und markiere die ausgezeichneten fünf Punkte A,B,C,D,E auf dieser Landkarte.

Schritt 2: Projiziere die fünf Punkte A,B,C,D,E von der Postkarte mittels Parallelprojektion auf eine Gerade. Dies entspricht einer projektiven Transformation mit Projektionszentrum ∞.

Schritt 3: Berechne mithilfe dieser Geraden das Doppelverhältnis λ für vier der fünf Punkte (homogene Koordinaten in $\mathbb{RP}^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Schritt 4: Durch diese vier Punkte und deren Doppelverhältnis ist ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt, auf welchem der Photograph gestanden haben muss.

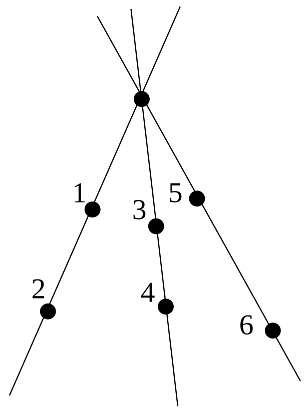
Schritt 5: Wiederhole dieses Verfahren für vier andere Punkte der fünf Punkte. Dies liefert einen weiteren Kegelschnitt, auf welchem der Photograph ebenfalls gestanden haben muss.

Schritt 6: Über die Schnittpunkte solcher Kegelschnitte lässt sich der Standort des Photographen dann eindeutig bestimmen.

— Hausaufgaben —

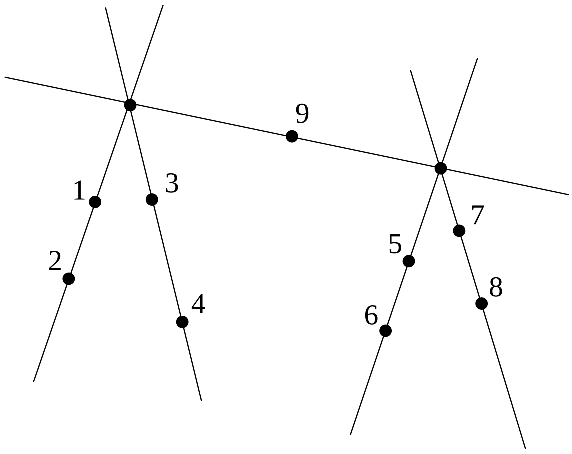
Aufgabe 27. Bracketpolynome und projektiv invariante Eigenschaften.

a) Zeigen Sie, dass das Bracket-Polynom $[123][456] - [124][356]$ genau dann Null wird, wenn die Geraden durch die Punktepaare (1 und 2), (3 und 4), (5 und 6) durch einen Punkt gehen.



Hinweis: Ist dies eine projektiv invariante Eigenschaft? Auf welchen schlauen Spezialfall können wir uns zurückziehen? Warum reicht dies?

b) Geben Sie das Bracket-Polynom an, dass für neun Punkte $1, \ldots, 9$ genau dann Null wird, wenn der Schnittpunkt der Geraden durch (1 und 2) sowie durch (3 und 4), der Schnittpunkt der Geraden durch (5 und 6) sowie durch (7 und 8), und der Punkt 9 auf einer Geraden liegen.



c) Können Sie Teilaufgabe b) zu einer Alternativlösung von Teilaufgabe a) heranziehen?

LÖSUNG:

a) Der Schnittpunkt S zweier Geraden $(1, 2)$ und $(3, 4)$ in $\mathbb{R}^2$ lässt sich mit homogenen Koordinaten (in $\mathbb{RP}^2$) und mithilfe von Brackets direkt angeben (Überprüfen der Kollinearität mit $(1, 2)$ und $(3, 4)$):

$$S = [123]4 - [124]3$$

Drei Geraden $(1, 2)$, $(3, 4)$ und $(5, 6)$ schneiden sich nun genau dann in einem Punkt, wenn der Schnittpunkt S der beiden Geraden $(1, 2)$ und $(3, 4)$ auf der Geraden $(5, 6)$ liegt, d.h. $[S, 5, 6] = 0$:

$$\begin{aligned} & [S, 5, 6] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & [[123]4 - [124]3, 5, 6] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & [123][456] - [124][356] = 0 \end{aligned}$$

Der Schnitt von drei Geraden in einem Punkt ist eine projektiv invariante Eigenschaft (das Bild ändert sich unter „Schiefdraufsehen“ nicht).

Spezialfall:
Sei P eine projektive Transformation, die den Schnittpunkt S der Geraden $(1, 2)$ und $(3, 4)$ ins Unendliche verschiebt; somit gilt

$$P((1, 2)) = (P(1), P(2)) \parallel (P(3), P(4)) = P((3, 4))$$

Dann gehen die drei Geraden $(1, 2)$, $(3, 4)$ und $(5, 6)$ genau dann durch einen gemeinsamen Punkt, wenn gilt

$$P((3, 4)) = (P(3), P(4)) \parallel (P(5), P(6)) = P((5, 6))$$

Dies ist aber genau dann der Fall, wenn das Dreieck

$$P(\triangle(456)) = \triangle(P(4), P(5), P(6))$$

den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck

$$P(\triangle 356) = \triangle(P(3), P(5), P(6))$$

hat (gleiche Grundseite $P((5, 6)) = (P(5), P(6))$, gleiche Höhe). Da die Dreiecke

$$P(\triangle 123) = \triangle(P(1), P(2), P(3))$$

und

$$P(\triangle 124) = \triangle(P(1), P(2), P(4))$$

den gleichen Flächeninhalt haben (und für den Flächeninhalt F eines beliebigen Dreiecks $\triangle(ABC)$ immer $F = \frac{1}{2}[ABC]$gilt), gilt in diesem Fall

$$[P(1)P(2)P(3)][P(4)P(5)P(6)] - [P(1)P(2)P(4)][P(3)P(5)P(6)] = 0$$

Dies ist eine projektive Invariante, also gleichwertig zu

$$[123][456] - [124][356] = 0$$

b) Der Schnittpunkt S_1 der beiden Geraden $(1,2)$ und $(3,4)$ ist

$$S_1 = [123]4 - [124]3$$

Der Schnittpunkt S_2 der beiden Geraden $(5,6)$ und $(7,8)$ ist

$$S_2 = [567]8 - [568]7$$

Die Bedingung ist demnach

$$\begin{aligned} & [S_1, S_2, 9] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & [[123]4 - [124]3, [567]8 - [568]7, 6] = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & [123][567][489] - [123][568][479] - [124][567][389] + [124][568][379] = 0 \end{aligned}$$

c) Identifiziere die beiden Punkte 3 und 7 sowie die beiden Punkte 4 und 8 (somit gilt $(3,4) = (7,8)$)). Dann liegt der Schnittpunkt der beiden Geraden $(1,2)$ und $(3,4)$ sowie der Schnittpunkt der beiden Geraden $(5,6)$ und $(7,8)(= (3,4))$ auf der Geraden $(3,4) = (7,8)$. Alle diese Geraden gehen genau dann durch einen Punkt, wenn das Bracketpolynom aus Teilaufgabe b) für ALLE Punkte 9 gleich Null ist (denn nur dann sind die „beiden“ Schnittpunke identisch), also auch (bzw. vor allem), wenn Punkt 9 NICHT auf der Geraden $(3,4)$ liegt. Das o.g. Bracketpolynom ist aber (wegen $3 = 7$ und $4 = 8$) gerade

$$([123][456] - [124][356])[349],$$

und dieses Polynom ist genau dann für alle Auswahlen von 9 gleich Null, wenn gilt

$$[123][456] = [124][356].$$