TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Aufgabenblatt 6 (8. Juni 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 26. Doppelverhältnisse und Kegelschnitte.

a) Gegeben sei eine projektive Gerade. Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^1$ auf der projektiven Geraden das Doppelverhältnis $(A, B; C, D) = \frac{3}{7}$ haben?

b) Gegeben sei eine projektive Gerade und fünf Punkte $A, B, C, D, E \in \mathbb{RP}^1$. Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)$ der vier Punkte A, B, C, D auf der projektiven Geraden gleich dem Doppelverhältnis $(A, C; D, E)$ der vier Punkte A, C, D, E ist?

c) Das Doppelverhältnis von vier Punkten A, B, C, D in der reellen projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist bezüglich eines weiteren Punktes $Z \in \mathbb{RP}^2$ mit $Z \notin \{A, B, C, D\}$ wie folgt definiert:

$$DV_X(A, B; C, D) = \frac{[XAC][XBD]}{[XBC][XAD]}$$

Gibt es ein multihomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass das Doppelverhältnis $DV_X(A, B; C, D)$ der vier Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ bezüglich eines Punktes $X \in \mathbb{RP}^2$, $X \notin \{A, B, C, D\}$ gleich dem Doppelverhältnis $DV_Y(A, B; C, D)$ der vier Punkte bezüglich eines weiteren Punktes $Y \in \mathbb{RP}^2$, $Y \notin \{A, B, C, D, X\}$ ist?

d) Für fünf voneinander verschiedene Punkte $X, A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ beschreibt die Menge

$$\{Y | DV_Y(A, B; C, D) = DV_X(A, B; C, D)\}$$

den eindeutig bestimmten Kegelschnitt durch diese fünf Punkte. Gibt es ein mulithomogenes Bracket-Polynom, das die Eigenschaft beschreibt, dass ein sechster Punkt ebenfalls auf diesem Kegelschnitt liegt?

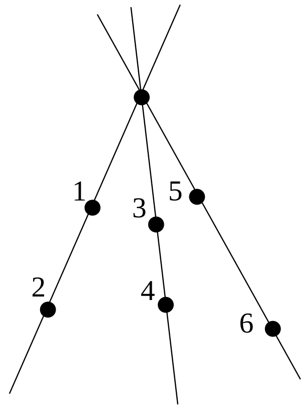
e)* Auf einer Postkarte von München seien fünf markante Punkte zu sehen. Wie lässt sich mithilfe dieser fünf Punkte und einem guten Stadtplan von München ermitteln, wo der Photograph dieser Postkarte gestanden hat?

Hinweis: Man projeziere die fünf markanten Punkte der Postkarte auf eine Gerade und verwende Doppelverhältnisse und Kegelschnitte.

— *Hausaufgaben* —

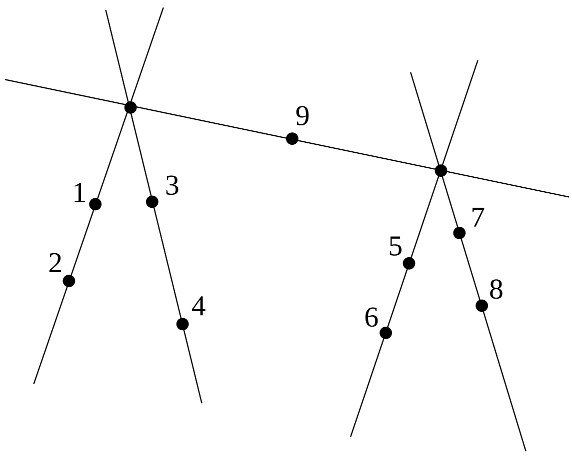
Aufgabe 27. Bracketpolynome und projektiv invariante Eigenschaften.

a) Zeigen Sie, dass das Bracket-Polynom $[123][456] - [124][356]$ genau dann Null wird, wenn die Geraden durch die Punktepaare (1 und 2), (3 und 4), (5 und 6) durch einen Punkt gehen.



Hinweis: Ist dies eine projektiv invariante Eigenschaft? Auf welchen schlauen Spezialfall können wir uns zurückziehen? Warum reicht dies?

b) Geben Sie das Bracket-Polynom an, dass für neun Punkte $1, \ldots, 9$ genau dann Null wird, wenn der Schnittpunkt der Geraden durch (1 und 2) sowie durch (3 und 4), der Schnittpunkt der Geraden durch (5 und 6) sowie durch (7 und 8), und der Punkt 9 auf einer Geraden liegen.



c) Können Sie Teilaufgabe b) zu einer Alternativlösung von Teilaufgabe a) heranziehen?