TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Lösungen zu Aufgabenblatt 5 (1. Juni 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 21. Harmonische Lage.

a) Gegeben seien drei Punkte auf einer Geraden im $\mathbb{RP}^2$. Konstruieren Sie einen vierten Punkt, so dass alle vier Punkte in harmonischer Lage sind.

Wieviele Möglichkeiten haben Sie, diesen vierten Punkt zu konstruieren? Was müssen Sie beachten?

b) Gegeben seien drei Geraden im $\mathbb{RP}^2$, die sich in einem Punkt schneiden. Konstruieren Sie eine vierte Gerade, so dass alle vier Geraden in harmonischer Lage sind.

LÖSUNG:

Harmonische Lage.

a) Es gibt $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, dass Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer projektiven Geraden zu bestimmen. Von diesen 24 Möglichkeiten stimmen aber jeweils vier überein (die Berechnung der einzelnen Doppelverhältnisse geschieht mithilfe der Formel, die das Doppelverhältnis definiert, der Grassmann-Plücker-Relationen und geschicktem Rechnen):

$$\begin{array}{ccccccccc}
DV(ab|cd) & = & DV(ba|dc) & = & DV(cd|ab) & = & DV(dc|ba) & =: & \lambda \\
DV(ab|dc) & = & DV(ba|cd) & = & DV(dc|ab) & = & DV(cd|ba) & = & \frac{1}{\lambda} \\
DV(ac|bd) & = & DV(ca|db) & = & DV(bd|ac) & = & DV(db|ca) & = & 1-\lambda \\
DV(ac|db) & = & DV(ca|bd) & = & DV(db|ac) & = & DV(bd|ca) & = & \frac{1}{1-\lambda} \\
DV(ad|bc) & = & DV(da|cb) & = & DV(bc|ad) & = & DV(cb|da) & = & 1-\frac{1}{\lambda} \\
DV(ad|cb) & = & DV(da|bc) & = & DV(cb|ad) & = & DV(bc|da) & = & \frac{\lambda}{\lambda-1}
\end{array}$$

Vier Punkte a, b, c, d sind genau dann in harmonischer Lage, wenn für ihr Doppelverhältnins

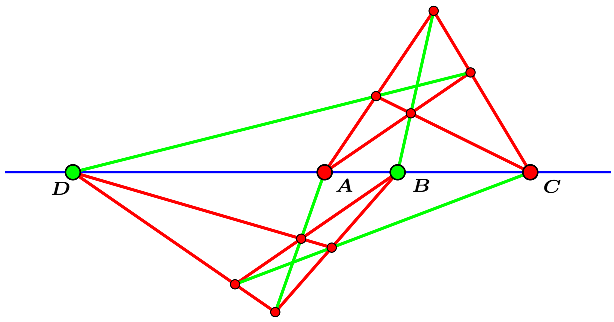
$$\lambda = DV(ab|cd) = -1$$

gilt. Somit nimmt das Doppelverhältnis bei Permutation von vier Punkten in harmonischer Lage nur noch drei verschiedene Werte an:

$$\begin{array}{ccccc}
\lambda & = & \frac{1}{\lambda} & = & -1 \\
1-\lambda & = & 1-\frac{1}{\lambda} & = & 2 \\
\frac{1}{1-\lambda} & = & \frac{\lambda}{\lambda-1} & = & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Es gibt also drei verschiedene Möglichkeiten, einen vierten Punkt einzuzeichnen, so dass sich die vier Punkte in harmonischer Lage befinden. Für jede dieser drei Möglichkeiten gibt es dann entsprechend acht verschiedene Möglichkeiten, die Punkte mit A, B, C, D zu bezeichnen.

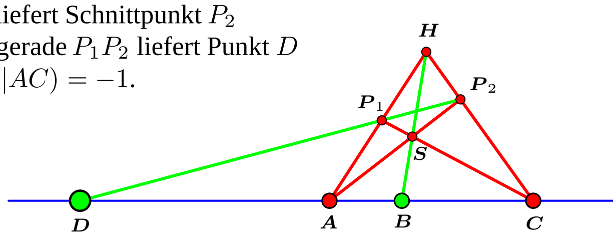
Andere Überlegung: Das Doppelverhältnis ist immer bezüglich zweier Punkte*paare* bestimmt. Die Wahl der Paare ist dabei symmetrisch, $DV(ab|cd) = DV(cd|ab)$. Geometrisch lässt sich diese Symmetrie wie folgt darstellen (die Punkte A und C sind einmal die Schnittpunkte der Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten des Konstruktionsvierecks mit der projektiven Geraden (Konstruktion oberhalb der projektiven Geraden) und einmal die Schnittpunkte der Diagonalen des Konstruktionsvierecks mit der projektiven Geraden (Konstruktion unterhalb der projektiven Geraden)):



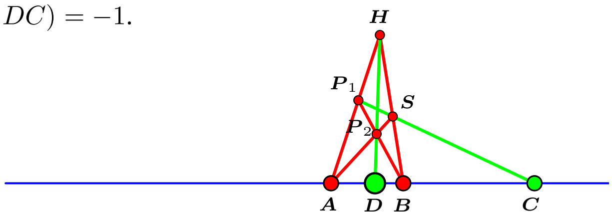
Es gibt $\binom{3}{2} = 3$ verschiedene Möglichkeiten, ein Punkte*paar* aus drei vorgegebenen Punkten auszuwählen.

Die drei Möglichkeiten, einen vierten Punkt harmonisch zu den drei vorhandenen Punkten zu konstruieren, sehen wie folgt aus:

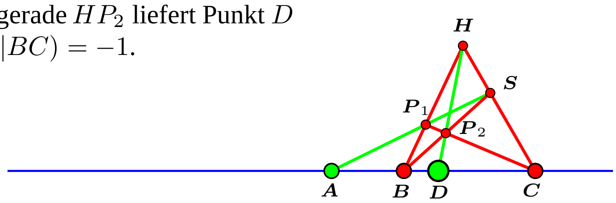
Möglichkeit 1: Paar $(A, C) \rightarrow$ Punkt D „ausserhalb" der drei vorgegebenen Punkte
KONSTRUKTION (in Stichworten):
$\rightarrow$ Dreieck AHC, Gerade BH
$\rightarrow$ beliebiger Punkt P_1 auf AH, Verbindungsgerade CP_1 liefert Schnittpunkt S
$\rightarrow$ Gerade AS, liefert Schnittpunkt P_2
$\rightarrow$ Verbindungsgerade P_1P_2 liefert Punkt D
Es gilt $DV(DB|AC) = -1$.



Möglichkeit 2: Paar $(A, B) \rightarrow$ Punkt D zwischen den „vorderen" beiden Punkten
KONSTRUKTION (in Stichworten):
$\rightarrow$ Dreieck AHC, beliebiger Punkt P_1 auf AH
$\rightarrow$ Verbindungsgerade P_1C, liefert Schnittpunkt S
$\rightarrow$ Verbindungsgerade AS und Verbindungsgerade BP_1 liefern Schnittpunkt P_2
$\rightarrow$ Verbindungsgerade HP_2 liefert Punkt D
Es gilt $DV(AB|DC) = -1$.

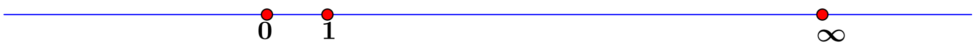


Möglichkeit 3: Paar $(B, C) \to$ Punkt D zwischen den „hinteren" beiden Punkten
KONSTRUKTION (in Stichworten):
$\to$ Dreieck BHC, beliebiger Punkt P_1 auf BH
$\to$ Verbindungsgerade P_1A, liefert Schnittpunkt S
$\to$ Verbindungsgerade BS und Verbindungsgerade CP_1 liefern Schnittpunkt P_2
$\to$ Verbindungsgerade HP_2 liefert Punkt D
Es gilt $DV(AD|BC) = -1$.



b) Gegeben seien drei Geraden, die sich alle in einem Punkt schneiden. Konstruktion einer vierten Geraden mit der Eigenschaft, dass sie zusammen mit den drei vorgegebenen anderen Geraden in harmonischer Lage ist: Zeichne eine Schnittgerade durch die drei vorhandenen Geraden. Dies liefert drei Schnittpunkte. Bestimme auf dieser Geraden einen vierten Punkt mit der Eigenschaft, dass er mit den drei vorhandenen (Schnitt-)Punkten in harmonischer Lage ist (dazu gibt es nach Aufgabenteil a) drei verschiedene Möglichkeiten). Zeichne die Verbindungsgerade durch den Schnittpunkt der drei vorgegebenen Geraden und diesen vierten Punkt. Die vier resultierenden Geraden sind dann in harmonischer Lage.

Aufgabe 22. Projektive Skala.
Gegeben seien die drei Punkte $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ und ∞:



a) Konstruieren Sie bezüglich der projektiven Basis $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty$ die Punkte $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$ und $\mathbf{5}$.

b) Konstruieren Sie den Punkt $-\mathbf{3}$.

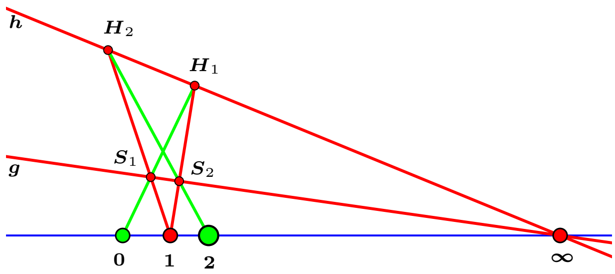
c) Konstruieren Sie den Punkt $\mathbf{9}$.

d) Konstruieren Sie den Punkt $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$.

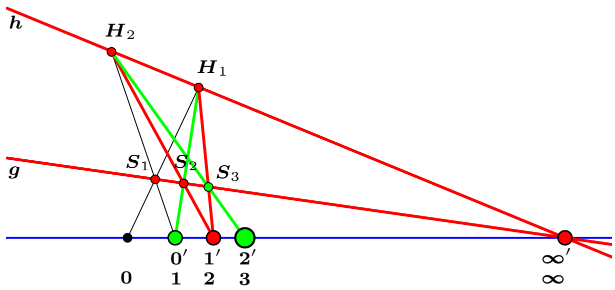
LÖSUNG:

a) **Punkt 2:** Auf einer projektiven Skala sind die Punkte $\mathbf{0}, 2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \infty$ immer in harmonischer Lage: $DV(\mathbf{0}, 2\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}, \infty) = -1$. Die Punkte $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty$ sind gegeben. Mit $\boldsymbol{x} = \mathbf{1}$ lässt sich somit der Punkt $2\boldsymbol{x} = \mathbf{2}$ so konstruieren, dass sich die vier Punkte in der oben angegebenen Paarzuteilung in harmonischer Lage befinden.

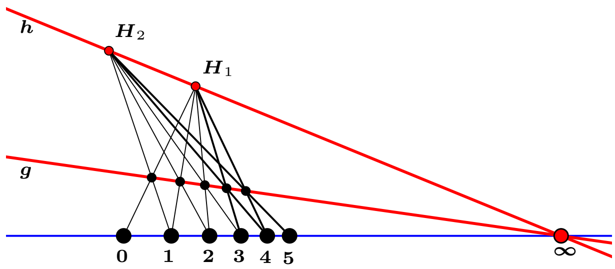
KONSTRUKTION (in Stichworten):
→ Hilfsgeraden g und h durch den Punkt ∞
→ Dreieck $\mathbf{0}H_1\mathbf{1}$, liefert Schnittpunkte S_1 und S_2
→ Verbindungsgerade $\mathbf{1}S_1$, liefert Schnittpunkt H_2 mit h
→ Verbindungsgerade H_2S_2 liefert Punkt $\mathbf{2}$



Punkt 3: Mit der gleichen Konstruktion kann nun Punkt 3 konstruiert werden:
Setze dazu $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}' = \mathbf{2}$ und $\infty' = \infty$. Dann gilt $DV(\mathbf{0}', 2\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}', \infty') = -1$, womit sich (für $\boldsymbol{x}' = \mathbf{1}'$) der Punkt $\mathbf{2}' = \mathbf{3}$ konstruieren lässt.

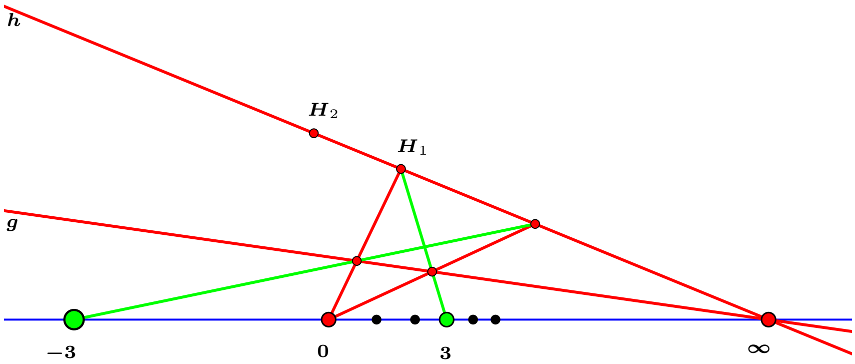


Punkt 4&5: Auf diese Art und Weise lassen sich sukzessiv die Punkte $\mathbf{4}$ und $\mathbf{5}$ auf der projektiven Skala konstruieren:



Beachte: Die „Abstände“ von Punkt zu Punkt werden immer kleiner.

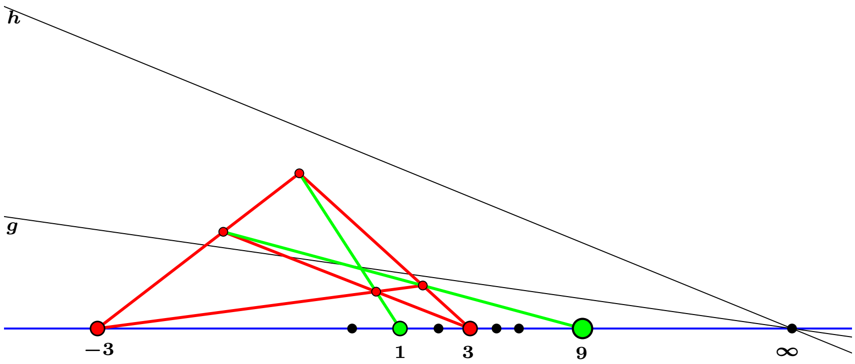
b) Auf einer projektiven Skala sind die Punkte $-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \mathbf{0}, \infty$ immer in harmonischer Lage: $DV(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\mathbf{0}, \infty) = -1$. Durch die bisherigen Konstruktionen sind die drei Punkte $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}, \mathbf{0}, \infty$ gegeben. Somit lässt sich nun der Punkt $-\boldsymbol{x} = -\mathbf{3}$ so konstruieren, dass sich die vier Punkte in der oben angegebenen Paarzuteilung in harmonischer Lage befinden:



Beachte: Die Wahl des bereits vorhandenen Punktes H_1 ist für die Konstruktion willkürlich. Es hätte ebenso jeder beliebige andere Punkt auf der Geraden h für die Konstruktion gewählt werden können.

Beispiele für alternative Konstruktionen:
$\longrightarrow$ schrittweise in Einserschritten

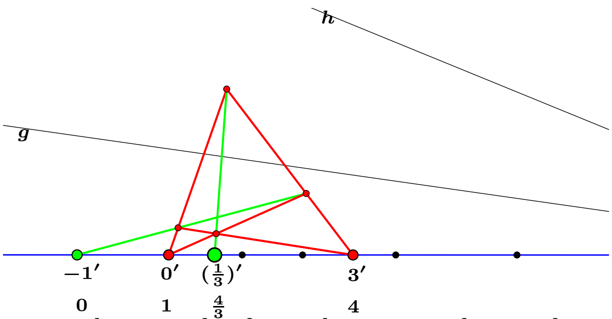
c) Auf einer projektiven Skala sind die Punkte $-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \mathbf{1}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$ immer in harmonischer Lage: $DV(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\mathbf{1}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}) = -1$. Durch die bisherigen Konstruktionen sind die drei Punkte $-\boldsymbol{x} = -3, \boldsymbol{x} = \mathbf{3}, \mathbf{1}$ gegeben. Somit lässt sich nun der Punkt $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} = \mathbf{9}$ so konstruieren, dass sich die vier Punkte in der oben angegebenen Paarzuteilung in harmonischer Lage befinden:



Beachte: Der Punkt ∞ sowie die Geraden g und h werden für diese Konstruktion *nicht* benötigt.

Beispiele für alternative Konstruktionen:
$\longrightarrow$ schrittweise in Einserschritten
$\longrightarrow$ Addition (via von-Staudt-Konstruktion) der Punkte $\mathbf{4}$ und $\mathbf{5}$
$\longrightarrow$ Multiplikation (via von-Staudt-Konstruktion) des Punktes $\mathbf{3}$ mit sich selbst

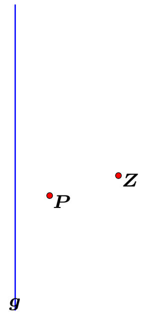
d) Der Punkt $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$ lässt sich (wie die anderen Punkte auch) auf viele verschiedene Weisen konstruieren. Eine Möglichkeit, ihn in einem einzigen Schritt aus dem bisher Konstruierten zu konstruieren ist folgende: Setze dazu $-\mathbf{1'} = \mathbf{0}$, $\mathbf{1}' = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{x}' = \mathbf{3}' = \mathbf{4}$ und verwende $DV(-\mathbf{1'}, \mathbf{1}'|(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}})', \boldsymbol{x}') = -1$.



Beachte: Auch für diese Konstruktion werden der Punkt ∞ sowie die Geraden g und h *nicht* benötigt.

Beispiele für alternative Konstruktionen:
$\longrightarrow$ Konstruktion des Punktes $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$, dann Addition (via von-Staudt-Konstruktion) mit Punkt 1
$\longrightarrow$ Konstruktion des Punktes $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$, dann Multiplikation (via von-Staudt-Konstruktion) mit Punkt 4

Aufgabe 23. Projektivspiegelung.
Gegeben sei eine Gerade g im $\mathbb{RP}^2$ und ein Punkt Z, der nicht auf dieser Geraden liege. Weiterhin sei ein Punkt $P \neq Z$ gegeben, der ebenfalls nicht auf der Geraden g liege.



a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt T der Geraden durch die beiden Punkte Z und P mit der Geraden g.

Bestimmen Sie nun einen vierten Punkt P', so dass die vier Punkte P', P, T und Z in harmonischer Lage sind, d.h. $(P', P; T, Z) = -1$.

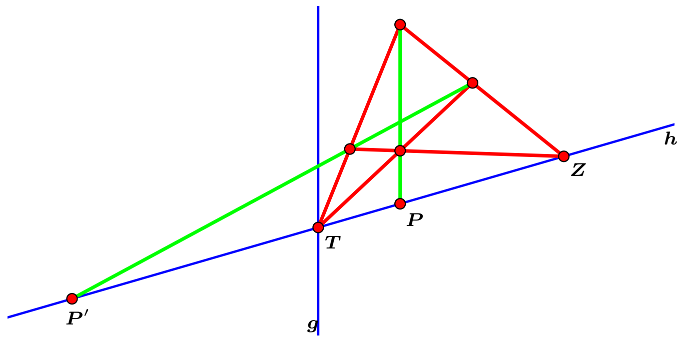
b) Zeigen Sie: Die in Aufgabenteil a) beschriebene Konstruktion bildet kollineare Punkte wieder auf kollineare Punkte ab.

c) Was erhalten Sie, wenn der Punkt Z ein Punkt auf der Ferngeraden ist?

d) Was erhalten Sie, wenn die Gerade g die Ferngerade ist?

LÖSUNG:

a) Die Konstruktion sieht wie folgt aus:



b) Die in Aufgabenteil a) beschriebene Konstruktion definiert für eine vorgegebene Gerade $g \in \mathbb{RP}^2$ und einen vorgegebenen Punkt $Z \in \mathbb{RP}^2$, der nicht auf der Geraden g liegt, zunächst für alle Punkte $P \in \mathbb{RP}^2$ mit $P \neq Z$ den Punkt $T_P := (Z \times P) \times g$ und damit folgende Abbildung

$$f_{g,Z} : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$$

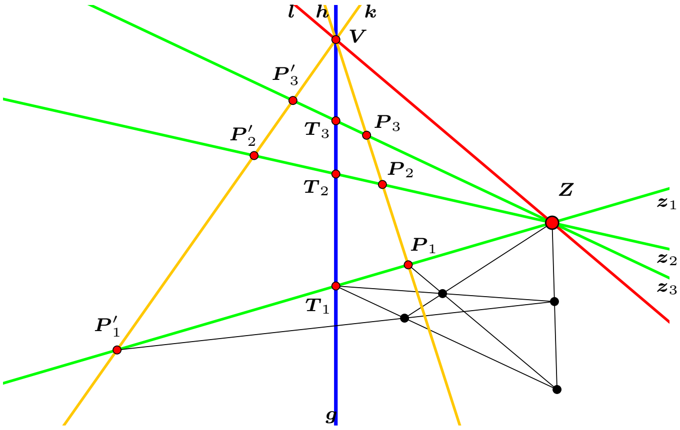
mit

$$f_{g,Z}(P) = \begin{cases} Z & \text{für } P = Z \\ T_P & \text{für } P = T_P \\ f_{g,P}(P) \text{ mit } DV(f_{g,Z}(P), P | Z, T_P) = -1 & \text{für } P \in \mathbb{RP}^2, P \neq Z, P \neq T_P \end{cases}$$

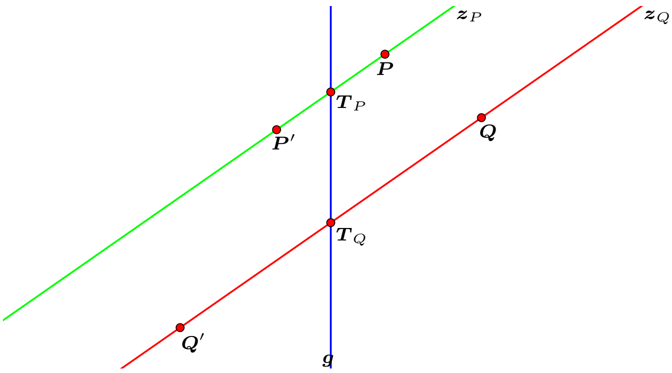
Behauptung: Die Abbildung $f_{g,Z}$ bildet kollineare Punkte wieder auf kollineare Punkte ab.

Beweis: Es seien drei kollineare Punkte P_1, P_2, P_3 auf einer Geraden h gegeben. Diese Gerade h schneidet die Gerade g in einem Punkt V. Konstruiere nun den Punkt P_1' nach der durch $f_{g,Z}$ gegebenen Bildungsvorschrift sowie die Gerade k durch die beiden Punkte P_1' und V. Konstruiere nun die Geraden z_2 und z_3 als Verbindungsgeraden von Z und P_2 bzw. Z und P_3. Die Schnittpunkte der Geraden k mit den beiden Geraden z_2 und z_3 werden mit Q_2 und Q_3 bezeichnet.

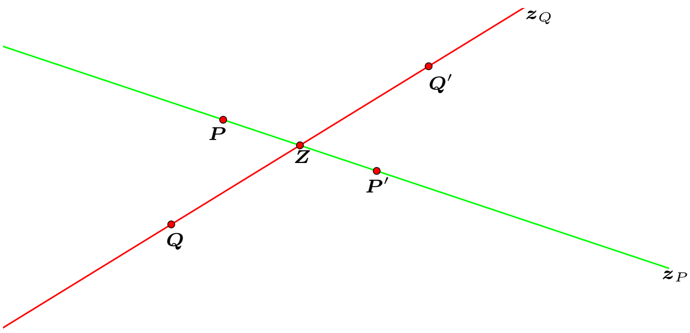
Nun gilt: V ist das Zentrum einer projektiven Abbildung. Jede projektive Abbildung erhält das Doppelverhältniss, und somit gilt: $DV(P_1', P_1|T_1, Z) = DV(Q_2, P_2|T_2, Z) = DV(Q_3, P_3|T_3, Z)$. Nun gilt aber $DV(P_1', P_1|T_1, Z) = -1$, woraus sofort $DV(Q_2, P_2|T_2, Z) = DV(Q_3, P_3|T_3, Z) = -1$ und damit $Q_2 = f_{g,Z}(P_2)$ und $Q_3 = f_{g,Z}(P_3)$ folgt.



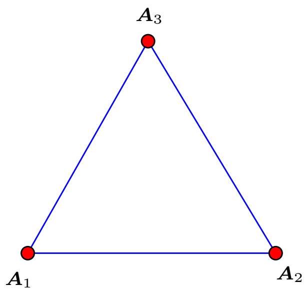
c) Wenn der Punkt Z ein Punkt auf der Ferngeraden ist, werden die durch $f_{g,Z}$ abgebildeten Punkte an der Geraden g in Richtung des Fernpunktes Z „gespiegelt“
(Erinnerung: $DV(-x, x|0, \infty) = -1$. Setze $x = P, T_p = 0, Z = \infty$):



d) Wenn die Gerade g die Ferngerade ist, werden die durch $f_{g,Z}$ abgebildeten Punkte am Punkt Z „gepunktspiegelt“
(Erinnerung: $DV(-x, x|0, \infty) = DV(x, -x|\infty, 0)$. Setze $x = p, T_P = \infty, Z = 0$):



Aufgabe 24. Kollineare Punkte.
Gegeben sei ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 im $\mathbb{RP}^2$.



a) Wählen Sie drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf den drei Dreiecksseiten, so dass B_1 auf der Dreiecksseite A_2A_3, B_2 auf der Dreiecksseite A_1A_3 und B_3 auf der Dreiecksseite A_1A_2 liegt und sich die drei Strecken A_iB_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ in einem Punkt schneiden.

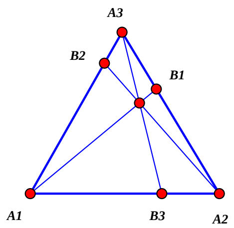
b) Bestimmen Sie nun drei weitere Punkte C_1, C_2, C_3 mit folgender Eigenschaft:

   Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ liege C_i auf der Geraden durch die Punkte A_j und A_k, und die Punkte A_j, A_k, B_i, C_i sind in harmonischer Lage, d.h. $(A_j, A_k; B_i, C_i) = -1$.

c) Zeigen Sie: Die nach Aufgabenteil a) und b) konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

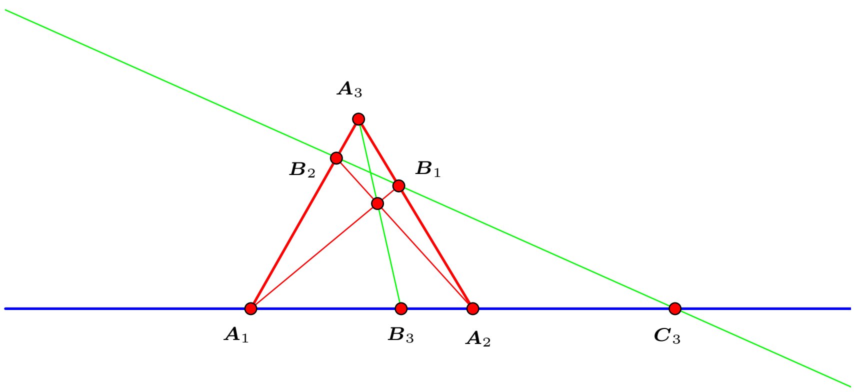
<u>LÖSUNG:</u>

a) Konstruktion der drei Punkte B_1, B_2, B_3:

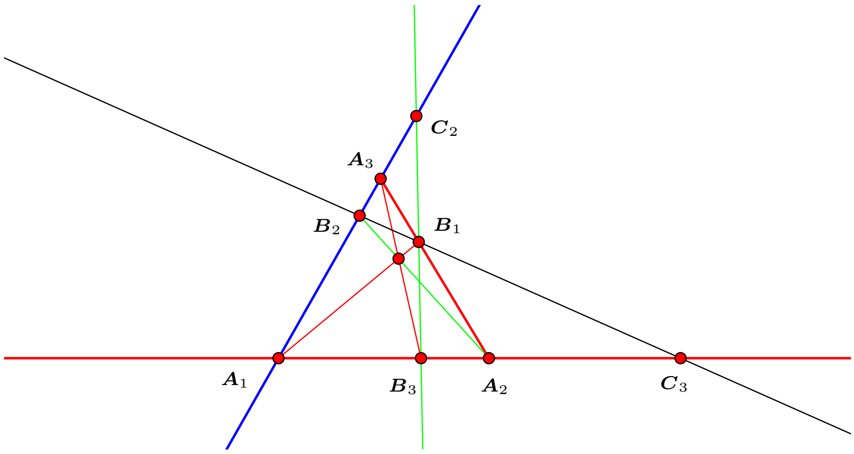


b) Die Konstruktion der drei Punkte C_1, C_2, C_3 mit der gewünschten Eigenschaft lässt sich in drei Schritten (mit bereits vorhandenen Geraden und Punkten) wie folgt durchführen:

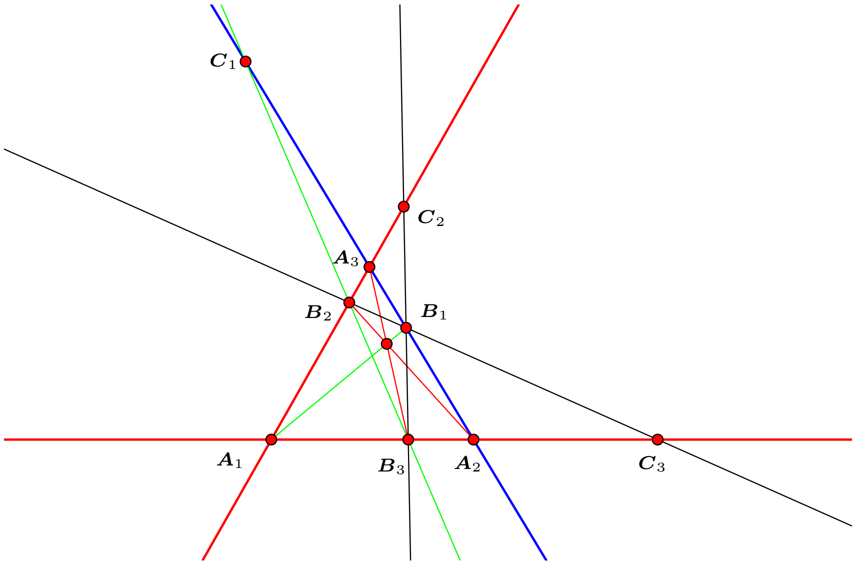
   Schritt 1: Konstruktion von Punkt C_3:



Schritt 2: Konstruktion von Punkt C_2:

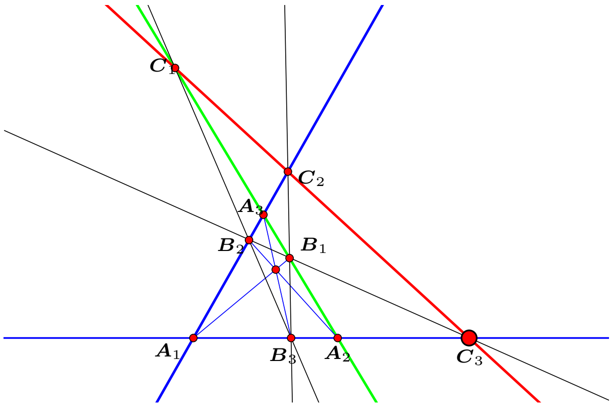


Schritt 3: Konstruktion von Punkt C_3:



c) **Behauptung:** Die nach Aufgabenteil a) und b) konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

Beweis: Betrachten wir die projektive Abbildung mit Zentrum C_3, die die (blaue) Gerade durch die Punkte A_1 und A_3 auf die (grüne) Gerade durch die Punkte A_2 und A_3 abbildet. Diese Abbildung bildet A_1 auf A_2, A_3 auf A_3 und B_2 auf B_1 ab. Nach Konstruktion der projektiven Abbildung mit Zentrum C_3 muss das Bild vom Punkt C_2 (der ja auf der (blauen) Geraden durch die beiden Punkte A_1 und A_3 liegt) sowohl auf der Geraden durch die beiden Punkte C_3 und C_2 als auch auf der (grünen) Geraden durch die beiden Punkte A_2 und A_3 liegen. Da die Abbildung projektiv ist, und damit Doppelverhältnisse erhält, gilt nach Konstruktion der Punkte C_1 und C_2 sofort, dass das Bild von Punkt C_2 gerade der Punkt C_1 ist. Damit sind die drei Punkte C_1, C_2 und C_3 kollinear.



Aufgabe 25. Projektive $\sqrt{2}$.
Gesucht ist eine projektive Skala mit den Punkten 0, 1, x, $-x$, 2 und ∞, so dass x projektiv immer der Zahl $\pm\sqrt{2}$ entspricht.

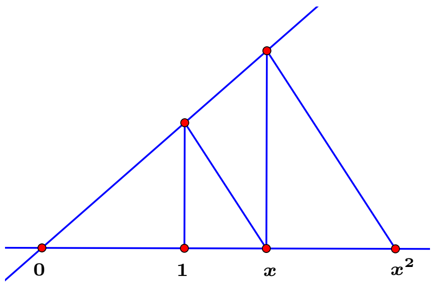
a) Zeichnen Sie eine Inzidenzstruktur von Punkten und Geraden, die diese Situation darstellt.

b) Lässt sich Ihre Inzidenzstruktur auch konstruieren? Kann es eine (nur mit dem Lineal) konstruierbare Inzidenzstruktur, die $\sqrt{2}$ auf einer projektiven Skala darstellt, überhaupt geben?

c) Geben Sie eine Inzidenzstruktur an, die bis auf projektive Äquivalenz genau 3 Realisierungen zulässt.

LÖSUNG:

a) Auf einer Zahlengeraden kann man mit von-Staudt-Konstruktion die Multiplikation einer beliebigen Zahl mit sich selbst konstruieren:



Eine Inzidenzstruktur von Punkten und Geraden, die immer die Zahl $\sqrt{2}$ darstellt, *könnte* (theoretisch!) also wie oben dargestellt aussehen, wenn wir für $x = \sqrt{2}$ und für $x = 2$ schreiben. Dies ist aber *nicht* möglich (siehe Aufgabenteil b)).

b) Eine solche Inzidenzstruktur wie oben lässt sich (praktisch!) *nicht* konstruieren, da sich die Zahl $\sqrt{2}$ nur mit Lineal *UND* Zirkel konstruieren lässt, nicht aber nur mit dem Lineal allein. Die von-Staudt-Multiplikation funktioniert also nur in eine Richtung.

c) Die Konstruktion zeigt die Konstruktion zweier Polynome f und g mit $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}$ und $g(x) = 2x$. Gesucht sind nun die Nullstellen des Polynoms $f - g$ mit $(f - g)(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$. Da dieses Polynom genau drei Nullstellen hat, gibt es genau drei Inzidenzstrukturen, bei denen der Punkt $\boldsymbol{2x}$ auf den Punkt $\boldsymbol{x^3 + \frac{1}{2}}$ zu liegen kommt.