TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Aufgabenblatt 5 (1. Juni 2005) —

— Präsenzaufgaben —

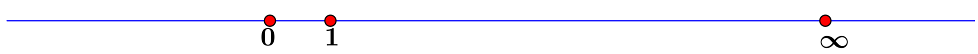
Aufgabe 21. Harmonische Lage.

a) Gegeben seien drei Punkte auf einer Geraden im $\mathbb{RP}^2$. Konstruieren Sie einen vierten Punkt, so dass alle vier Punkte in harmonischer Lage sind.

Wieviele Möglichkeiten haben Sie, diesen vierten Punkt zu konstruieren? Was müssen Sie beachten?

b) Gegeben seien drei Geraden im $\mathbb{RP}^2$, die sich in einem Punkt schneiden. Konstruieren Sie eine vierte Gerade, so dass alle vier Geraden in harmonischer Lage sind.

Aufgabe 22. Projektive Skala.
Gegeben seien die drei Punkte $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ und ∞:



a) Konstruieren Sie bezüglich der projektiven Basis $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty$ die Punkte $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$ und $\mathbf{5}$.

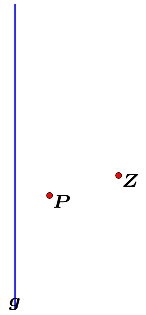
b) Konstruieren Sie den Punkt $-\mathbf{3}$.

c) Konstruieren Sie den Punkt $\mathbf{9}$.

d) Konstruieren Sie den Punkt $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 23. Projektivspiegelung.
Gegeben sei eine Gerade g im $\mathbb{RP}^2$ und ein Punkt Z, der nicht auf dieser Geraden liege. Weiterhin sei ein Punkt $P \neq Z$ gegeben, der ebenfalls nicht auf der Geraden g liege.



a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt T der Geraden durch die beiden Punkte Z und P mit der Geraden g.

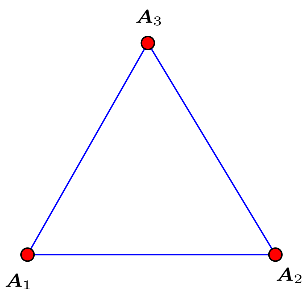
   Bestimmen Sie nun einen vierten Punkt P', so dass die vier Punkte P', P, T und Z in harmonischer Lage sind, d.h. $(P', P; T, Z) = -1$.

b) Zeigen Sie: Die in Aufgabenteil a) beschriebene Konstruktion bildet kollineare Punkte wieder auf kollineare Punkte ab.

c) Was erhalten Sie, wenn der Punkt Z ein Punkt auf der Ferngeraden ist?

d) Was erhalten Sie, wenn die Gerade g die Ferngerade ist?

Aufgabe 24. Kollineare Punkte.
Gegeben sei ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 im $\mathbb{RP}^2$.



a) Wählen Sie drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf den drei Dreiecksseiten, so dass B_1 auf der Dreiecksseite A_2A_3, B_2 auf der Dreiecksseite A_1A_3 und B_3 auf der Dreiecksseite A_1A_2 liegt und sich die drei Strecken A_iB_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ in einem Punkt schneiden.

b) Bestimmen Sie nun drei weitere Punkte C_1, C_2, C_3 mit folgender Eigenschaft:

   Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ liege C_i auf der Geraden durch die Punkte A_j und A_k, und die Punkte A_j, A_k, B_i, C_i sind in harmonischer Lage, d.h. $(A_j, A_k; B_i, C_i) = -1$.

c) Zeigen Sie: Die nach Aufgabenteil a) und b) konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

Aufgabe 25. Projektive $\sqrt{2}$.
Gesucht ist eine projektive Skala mit den Punkten 0, 1, x, $-x$, 2 und ∞, so dass x projektiv immer der Zahl $\pm\sqrt{2}$ entspricht.

a) Zeichnen Sie eine Inzidenzstruktur von Punkten und Geraden, die diese Situation darstellt.

b) Lässt sich Ihre Inzidenzstruktur auch konstruieren? Kann es eine (nur mit dem Lineal) konstruierbare Inzidenzstruktur, die $\sqrt{2}$ auf einer projektiven Skala darstellt, überhaupt geben?

c) Geben Sie eine Inzidenzstruktur an, die bis auf projektive Äquivalenz genau 3 Realisierungen zulässt.