TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)

— Lösungen zu Aufgabenblatt 4 (25. Mai 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 16. Dualisieren und Doppelverhältnis.
Es gilt der folgende Satz:
Gegeben seien zwei verschiedenen Geraden g und h in der rellen projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ und ein Punkt Z, der weder auf g noch auf h liege.Dann gilt: Vier paarweise verschiedene Geraden z_1, z_2, z_3, z_4 durch den Punkt Z schneiden die beiden Geraden g bzw. h in je vier Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 bzw. H_1, H_2, H_3, H_4, und für die beiden Doppelverhältnisse $(G_1, G_2; G_3, G_4)$ und $(H_1, H_2; H_3, H_4)$ gilt $(G_1, G_2; G_3, G_4) = (H_1, H_2; H_3, H_4)$.

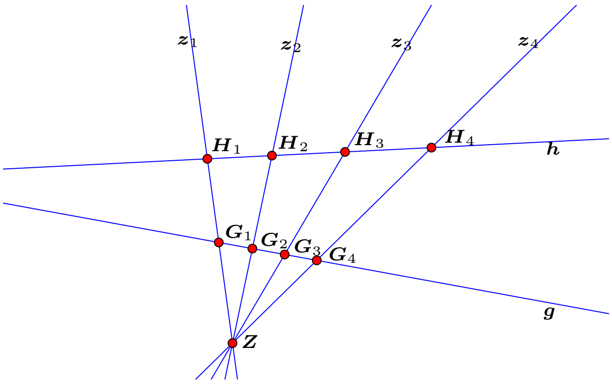
a) Fertigen Sie eine Skizze zu diesem Satz an.

b) Dualisieren Sie diesen Satz.

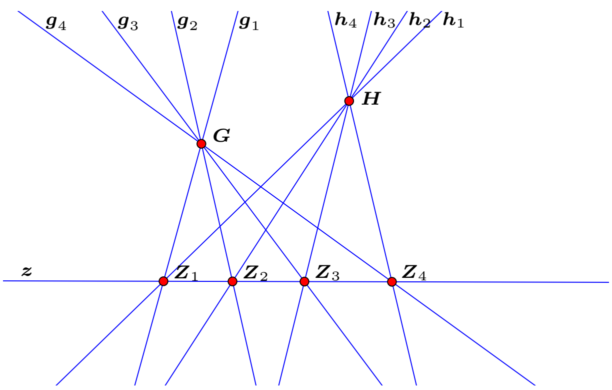
c) Beweisen Sie diesen Satz.

LÖSUNG:

a) Der in Aufgabenteil a) angegebene Satz lässt sich wie folgt skizzieren:



b) Der zum Satz aus Aufgabenteil a) duale Satz lässt sich wie folgt formulieren:
Gegeben seien zwei verschiedene Punkte G und H in der reellen projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ und eine Gerade z, die weder durch G noch durch H gehe. Dann gilt: Vier paarweise verschiedene Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 auf der Geraden z haben je vier Verbindungsgeraden g_1, g_2, g_3, g_4 bzw. h_1, h_2, h_3, h_4 zu den beiden Punkten G bzw. H, und für die Doppelverhältnisse der Geraden $(g_1, g_2; g_3, g_4)$ und $(h_1, h_2; h_3, h_4)$ gilt $(g_1, g_2; g_3, g_4) = (h_1, h_2; h_3, h_4)$.
Skizze:



c) Beweis des Satzes aus Aufgabenteil a):
Die Punkte $H1$, $H2$, $H3$, $H4$ gehen aus den Punkten $G1$, $G2$, $G3$, $G4$ durch Zentralprojektion der Geraden g auf die Gerade h mit Zentrum Z hervor. Die Zentralprojektion einer Geraden auf eine andere Gerade ist eine projektive Abbildung. Das Doppelverhältnis ist invariant unter projektiven Abbildungen, wenn nicht die ganze Gerade g auf einen einzigen Punkt abgebildet wird.

Aufgabe 17. Doppelverhältnis.

a) Gegeben seien 5 Punkte x, y, a, b, $c \in \mathbb{R}^2$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den drei Doppelverhältnissen $(x, y; a, b)$, $(x, y; b, c)$ und $(x, y; a, c)$?

b) Finden Sie weitere Zusammenhänge.

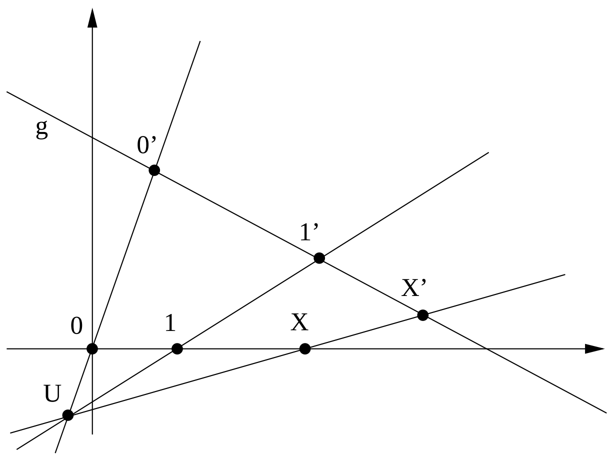
<u>LÖSUNG:</u>

a) Es gilt
$$(x, y; a, b) = \frac{[xa][yb]}{[xb][ya]}\ , \quad (x, y; b, c) = \frac{[xb][yc]}{[xc][yb]}\ , \quad (x, y; a, c) = \frac{[xa][yc]}{[xc][ya]}$$
und somit
$$(x, y; a, b) \cdot (x, y; b, c) = \frac{[xa][yb]}{[xb][ya]} \cdot \frac{[xb][yc]}{[xc][yb]} = \frac{[xa][yc]}{[xc][ya]} = (x, y; a, c)$$

b) Das Produkt von Doppelverhältnissen ist durch das Wegkürzen aufeinander folgender Brackets in gewissem Sinne „transitiv“: Es gilt (für $k \in \mathbb{N}$)
$$(x, y; a_1, a_2) \cdot (x, y; a_2, a_3) \cdot (x, y; a_3, a_4) \cdot \ldots (x, y; a_{k-1}, a_k) = (x, y; a_1, a_k).$$

— Hausaufgaben —

Aufgabe 18. Projektionen und Projektive Transformationen.
Im $\mathbb{R}^2$ seien folgende Punkte und Geraden gegeben: **0** sei der Nullpunkt, $\mathbf{1} = (1, 0)$, $\mathbf{X} = (x_X, 0)$, weiterhin sei g eine Gerade durch die beiden Punkte $\mathbf{0}' = (0_x, 0_y)$ und $\mathbf{1}' = (1_x, 1_y)$. Die Geraden durch ($\mathbf{0}$ und $\mathbf{0}'$) sowie durch ($\mathbf{1}$ und $\mathbf{1}'$) schneiden sich im Punkt $\mathbf{U}$. $\mathbf{X}'$ sei der Schnittpunkt der Gerade durch ($\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$) mit g, d.h. $\mathbf{X}'$ ist die Projektion von $\mathbf{X}$ auf g.



a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $\mathbf{X}'$ in $\mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $\mathbf{X}'$ auf g, d.h. die Koeffizienten μ und λ in $\mathbf{X}' = \mu\mathbf{0}' + \lambda\mathbf{1}'$. Was ist die Bedeutung von λ? Wie kann λ als Funktion von $\mathbf{X}_x$ ausgedrückt werden?

c) Was hat dies mit projektiven Transformationen zu tun?

LÖSUNG:

a) Die Koordinaten des Punktes $\mathbf{X}'$ lassen sich mithilfe homogener Koordinaten wie folgt berechnen:

$$\mathbf{X}' = (\underbrace{(\underbrace{(\mathbf{0}\times\mathbf{0}')}_{\text{Gerade durch } \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{0}'} \times \underbrace{(\mathbf{1}\times\mathbf{1}')}_{\text{Gerade durch } \mathbf{1} \text{ und } \mathbf{1}'})}_{\mathbf{U}} \times \mathbf{X})}_{\text{Gerade durch } \mathbf{U} \text{ und } \mathbf{X}} \times \underbrace{(\mathbf{0}'\times\mathbf{1}')}_{\text{Gerade } g}$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich drei Geraden durch sechs disjunkte Punktepaare (a,b), (c,d) und (e,f) mit $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}^2$ genau dann in einem Punkt schneiden, wenn die folgende Bracketgleichung (mit den Punkten in homogenen Koordinaten) erfüllt ist:

$$[abe][cdf] - [abf][cde] = 0$$

Betrachten wir die drei Geraden durch die Punktepaare $(a,b) = (\mathbf{0},\mathbf{0}')$, $(c,d) = (\mathbf{X},\mathbf{X}')$ und $(e,f) = (\mathbf{1},\mathbf{1}')$, die sich ja nach Konstruktion im Punkt $\mathbf{U}$ schneiden, gilt mit obiger Bracketgleichung:

$$[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{1}] = 0$$

Nun gilt aber

$$\mathbf{X}' = \mu\mathbf{0}' + \lambda\mathbf{1}' = (1-\lambda)\mathbf{0}' + \lambda\mathbf{1}'$$

Setzen wir dies in obige Bracketgleichung ein und nutzen die Multilinearität von Determinanten aus, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{X}'\mathbf{1}] \\
&= [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\ \underbrace{((1-\lambda)\mathbf{0}' + \lambda\mathbf{1}')}_{\mathbf{X}'}\ \mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\ \underbrace{((1-\lambda)\mathbf{0}' + \lambda\mathbf{1}')}_{\mathbf{X}'}\ \mathbf{1}] \\
&= (1-\lambda)[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] + \lambda[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}]\underbrace{[\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}']}_{=0} - (1-\lambda)[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] - \lambda[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] \\
&= (1-\lambda)[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - (1-\lambda)[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] - \lambda[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] \\
&= \lambda(-[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}]) + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nun gilt für die Punkte $(\mathbf{0}\mathbf{0}'|\mathbf{1}\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}')$ folgende Grassmann-Plücker-Relation:

$$[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{X}][\mathbf{1}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] + \underbrace{[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{0}'][\mathbf{1}\mathbf{X}\mathbf{1}']}_{=0} - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{1}\mathbf{X}\mathbf{0}'] = 0$$

Addition von Null verändert die ursprüngliche Gleichung nicht, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\lambda(-[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}]) + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] \\
&= \lambda(-[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] + 0) \\
&\quad + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] \\
&= \lambda(-[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] + \underbrace{[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{X}][\mathbf{1}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{1}\mathbf{X}\mathbf{0}']}_{=0 \text{ (GP-Relation)}}) \\
&\quad + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] \\
&= \lambda(-[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{X}][\mathbf{1}\mathbf{0}'\mathbf{1}']) + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] \\
&= \lambda([\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{X}][\mathbf{1}\mathbf{0}'\mathbf{1}']) - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für λ

$$\lambda = \frac{[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}]}{[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{X}][\mathbf{1}\mathbf{0}'\mathbf{1}']}$$

Um λ jetzt als Funktion in der x-Koordinate X_x des Punktes $\mathbf{X}$ auszudrücken, müssen wir die einzelnen Determinanten ausrechnen.

Dazu sei (in homogenen Koordinaten)

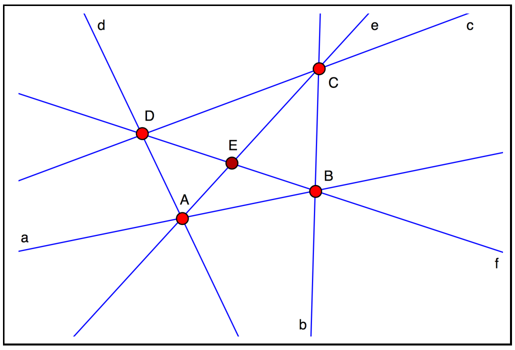
$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{0}' = \begin{pmatrix} 0_x \\ 0_y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1}' = \begin{pmatrix} 1_x \\ 1_x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Koordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}'] - [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{0}'\mathbf{1}]}{[\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{1}'][\mathbf{X}\mathbf{1}'\mathbf{1}] + [\mathbf{0}\mathbf{0}'\mathbf{X}][\mathbf{1}\mathbf{0}'\mathbf{1}']} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0_x & 1 \\ 0 & 0_y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_x & 0_x & 1_x \\ 0 & 0_y & 1_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0_x & 1_x \\ 0 & 0_y & 1_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_x & 0_x & 1 \\ 0 & 0_y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0_x & 1_x \\ 0 & 0_y & 1_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_x & 1_x & 1 \\ 0 & 1_y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0_x & X_x \\ 0 & 0_y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0_x & 1_x \\ 0 & 0_y & 1_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(-0_y^2 + 0_y^2 1_x - 0_y^2 1_y + 0_y 1_y) X_x}{(1_y^2 0_x - 0_y 1_y 1_x - 0_x 1_y + 0_y 1_x + 1_y) X_x - 0_x 1_y^2 + 0_y 1_x 1_y}
\end{aligned}$$

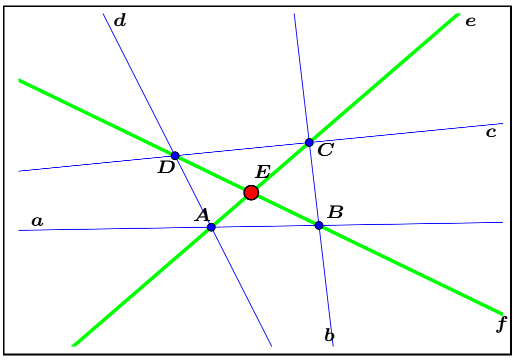
c) Bei der Abbildung in Aufgabenteil a) handelt es sich um eine projektive Transformation der Geraden durch die beiden Punkte $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ auf die Gerade durch die beiden Punkte $\mathbf{0}'$ und $\mathbf{1}'$. Bezüglich der vorgegeben „Basis“ wird $\mathbf{X}$ entsprechend auf $\mathbf{X}'$ abgebildet. Das zugehörige λ lässt sich nach Aufgabenteil b) als Funktion in der x-Koordinate des Punktes $\mathbf{X}$ ausdrücken, und diese Funktion hat die Gestalt einer Möbiustranformation!

Aufgabe 19. Dualisieren.
Dualisieren Sie folgende geometrische Situation ("Die Diagonalen in einem Viereck schneiden sich."):

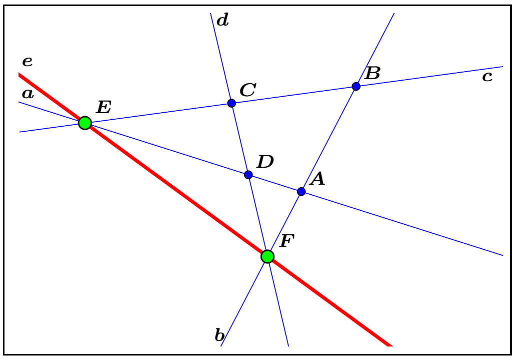


LÖSUNG:

Konstruktion der geometrischen Situation:
4 Punkte A, B, C, D
und 4 Verbindungsgeraden $a = A \vee B$, $b = B \vee C$, $c = C \vee D$, $d = D \vee A$,
2 weitere Geraden $e = A \vee C$ und $f = B \vee D$ (in grün),
1 Schnittpunkt $E = e \vee f$ (in rot).



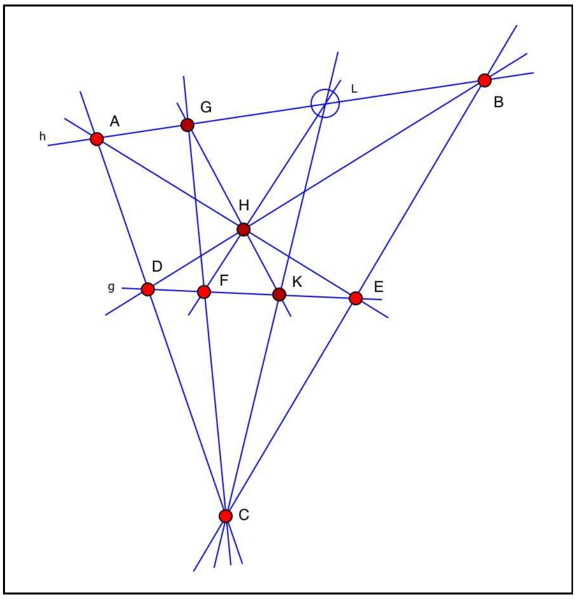
Konstruktion der dualisierten geometrischen Situation:
4 Geraden a, b, c, d
und 4 Schnittpunkte $A = a \wedge b$, $B = b \wedge c$, $C = c \wedge d$, $D = d \wedge a$,
2 weitere Schnittpunkte $E = a \wedge c$ und $F = b \wedge d$ (in grün),
1 Verbindungsgerade e (in rot).



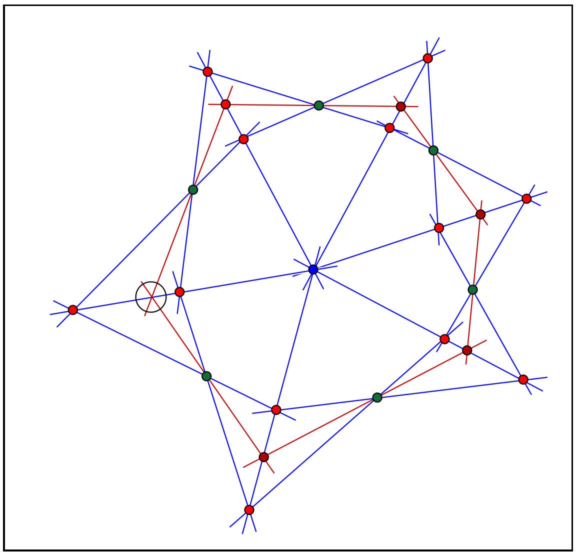
Bemerkung: Vervollständigen wir beide Zeichnungen, indem wir in der ersten Zeichnung noch die beiden Schnittpunkte der Geraden a und c bzw. der Geraden b und d und in der zweiten Zeichnung noch die Verbindungeraden zwischen den Punkten A und C bzw. B und D einzeichnen, erhalten wir kombinatorisch gleiche Zeichnungen.

Aufgabe 20. Doppelverhältnis.
Formulieren Sie die beiden folgenden Inzidenzsätze (Kringel) und beweisen Sie diese mit Hilfe von Doppelverhältnissen:

a)



b)



LÖSUNG:

a) KONSTRUKTION:

1.Schritt: Gegeben seien ein Punkt C und zwei nicht identische Geraden g und h.

2.Schritt: Wähle zwei Punkte D und E auf der Geraden g. Dies ergibt (via Gerade durch (C, D) bzw. Gerade durch (C, E)) die beiden Schnittpunkte A und B auf der Geraden h. Dies wiederum definiert den Schnittpunkt H der beiden Geraden durch die Punkte (D, B) bzw. (A, E).

3.Schritt: Wähle beliebig einen dritten Punkt F auf der Geraden g. Dieser definiert den Schnittpunkt G der Geraden durch (C, F) mit der Geraden h.

4.Schritt: Der (Schnitt-)Punkt G legt nun den Punkt K fest (als Schnittpunkt der Geraden durch (G, H) mit der Geraden g).

5.Schritt: Nun ist der Schnittpunkt der Geraden durch (F, H) mit der Geraden h mit dem Schnittpunkt der Geraden durch (C, K) mit der Geraden h identisch.

Beweis: Die so ausgeführte Konstruktion projiziert die vier Punkte der Geraden g projektiv einmal mittels des Zentrums C und einmal mittels des Zentrums H auf die Gerade g. Doppelverhältnisse bleiben unter projektiven Abbildungen erhalten.
Genauer: Da die vier Punkte D, F, K, E durch eine projektive Transformation mit Zentrum C auf die vier Punkte A, G, L, B abgebildet werden, gilt für das Doppelverhältnis dieser vier Punkte

$$(DF; KE) = (AG, LB) = \frac{[AL][GB]}{[AB][GL]}.$$

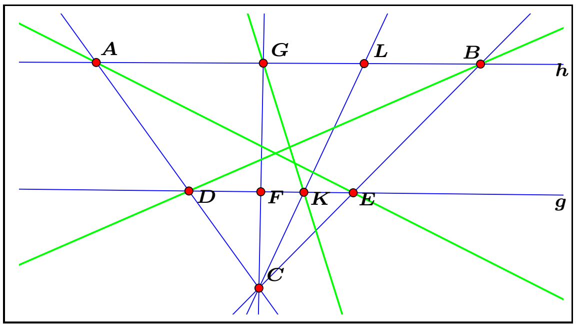
Nun gilt aber rein rechnerisch, dass

$$\frac{[AL][GB]}{[AB][GL]} = \frac{[BG][LA]}{[BA][LG]} = (BL, GA).$$

Damit folgt $(DF, KE) = (BL, GA)$. Daraus folgt wiederum, dass H das Zentrum einer projektiven Transformation ist, was die gesuchte Inzidenz impliziert.

Bemerkung: Man ist leicht versucht anzunehmen, dass folgende Konstruktion ebenso zum Ziel führt:

Gegeben Punkt C und zwei nicht identische Geraden g und h. Wähle vier Punkte D, F, K, E auf der Geraden g. Dies definiert via Geraden durch den Punkt C die vier Schnittpunkte A, G, L, B. Dann schneiden sich die Verbindungsgeraden (A, E) und (D, B) in einem Schnittpunkt H. Dieser liegt in der Regel bereits aber schon nicht mehr auf der Geraden durch die Punkte (G, K):



Diese Konstruktion führt also *nicht* zur gesuchten Inzidenz.

b) KONSTRUKTION:

1. Schritt: Gegeben sei ein „Stern“ mit Mittelpunkt (blaue Geraden).

2. Schritt: Die sechs Zacken des Sternes bestimmen die sechs grünen Schnittpunkte.

3. Schritt: Das rote Sechseck ist am Ende geschlossen, weil jeder grüne Punkt das Zentrum einer projektiven Transformation ist, und diese jeweils auf allen sechs Geraden durch den Mittelpunkt des Sterns das Doppelverhältnis der vier Punkte (inklusive Mittelpunkt) erhält.