TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Aufgabenblatt 3 (11. Mai 2005) —

— Präsenzaufgaben —

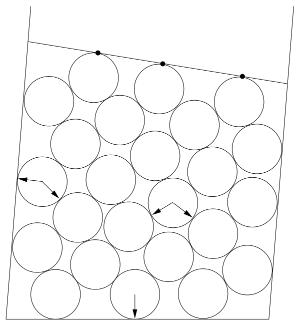
Aufgabe 10. Spiegelungen.
Gegeben sei das Dreieck $\triangle PQR$ durch die drei Punkte $P = (5, 1)$, $Q = (10, 2)$ und $R = (9, 7)$.

a) Bestimmen Sie die Matrix S_1, die eine Spiegelung an der Geraden g_1 durch den Ursprung und den Punkt $G_1 = (2, 3)$ beschreibt. Berechnen Sie anschliessend das Bild von $\triangle PQR$ unter dieser Abbildung.

b) Bestimmen Sie die Matrix S_2, die eine Spiegelung an der Geraden g_2 durch die beiden Punkte $G_2 = (15, 5)$ und $G_3 = (9, 11)$ beschreibt. Berechnen Sie anschliessend das Bild von $\triangle PQR$ unter dieser Abbildung.

c) Zeichnen Sie das Dreieck $\triangle PQR$, die Geraden g_1 und g_2 sowie die gespiegelten Dreiecke in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 11. Weinflaschenproblem.
In einem Weinregal, in dem die beiden Seitenwände parallel sind, seien Weinflaschen derart gestapelt, dass auf dem Boden drei Flaschen liegen, in der nächsten Reihe vier, dann wieder drei, vier, drei, vier, drei. Dabei sollen die “inneren” Flaschen genau die beiden darunterliegenden Flaschen berühren, und die “äusseren” die Wand und die darunterliegende Flasche (siehe Abbildung). Die drei Flaschen in der untersten Reihe sollen lediglich den Regalboden berühren.
Zeigen Sie, dass in der siebten Reihe die drei Weinflachen koplanar sind, d.h. dass man einen Deckel auf das Regal legen kann, der alle drei Flaschen berührt.



— Hausaufgaben —

Aufgabe 12. Drehungen.

a) Bestimmen Sie die Matrix $D_1 \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die eine Drehung um den Punkt $P = (2, 1)$ mit dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ beschreibt.

b) Bestimmen Sie die Matrix D_x (die Matrix D_y, die Matrix D_z) in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ mit dem Winkel φ um die x-Achse (um die y-Achse, um die z-Achse) beschreibt.

c) Bestimmen Sie die Matrix D_2, die eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ um die Winkelhalbierende der xy-Ebene mit dem Winkel φ beschreibt.

Aufgabe 13. Sechs Punkte auf einem Kegelschnitt. Es seien fünf Punkte $1, \ldots, 5$ im $\mathbf{R}P^2$ gegeben. Sie bestimmen im allgemeinen einen Kegelschnitt

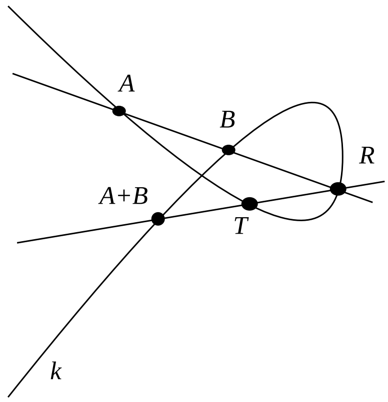
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}.$$

Zeigen Sie dass ein Punkt 6 genau dann auf C liegt, wenn

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & x_6z_6 \end{pmatrix} = 0.$$

Hinweis: Im $\mathbf{R}^d$ wird durch $d-1$ Punkte $a_1, \ldots, a_{d-1}$ ein $d-1$-dimensionaler Unterraum mit der Formel $\langle h, a\rangle = 0$ aufgespannt. Ein Punkt a liegt also genau dann in diesem Unterraum, wenn $\langle h, a\rangle = 0$, aber auch genau dann, wenn $det(a_1, \ldots, a_{d-1}, a) = 0$.

Aufgabe 14. Anwendung des Satzes von Bezout.
Eine Kurve dritten Grades k in der Ebene ist die Lösungsmenge eines Polynoms dritten Grades in zwei Variablen. Sie hat die Eigenschaft, dass die Verbindungsgerade durch zwei Punkte A und B auf der Kurve diese in einem dritten Punkt R schneidet (dieser dritte Schnittpunkt kann auch im Unendlichen liegen). Es sei ein beliebiger, aber fester Punkt T auf k gegeben. Der dritte Schnittpunkt der Gerade durch R und T mit k sei mit $A + B$ bezeichnet.



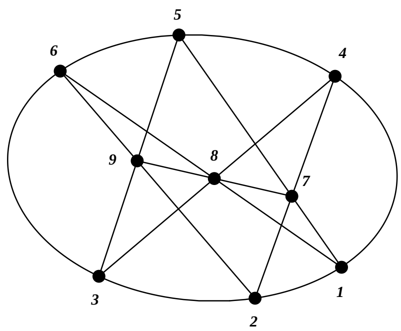
a) Zeigen Sie die Assoziativität der Operation "$+$". Beschränken Sie sich dabei auf den Fall, dass keiner der konstruierten Punkte im Unendlichen liegt, d.h. wie in der Abbildung.

b) Was hat dies mit dem Satz von Pappos zu tun?

c*) Beweisen Sie, dass wenn k keine singulären Punkte hat, die Operation "$+$" eine Gruppe definiert (unter Hinzunahme des Punktes im Unendlichen). Was ist das neutrale, was das inverse Element?

Aufgabe 15. Spezialfälle von Pascals Theorem.

Pascals Theorem: Werden 6 Punkte beliebig auf einem Kegelschnitt gewählt und wie im Bild unten mit 1 bis 6 durchnumeriert, so sind die nach der ebenfalls rechts im Bild durchgeführten Konstruktion bestimmten Punkte 7,8 und 9 kollinear.



a) Zeichnen Sie das zugehörige Bild, wenn die 6 Punkte Ecken eines konvexen Hexagons sind, und zwar in der Reihenfolge 1,5,3,4,2,6.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Pascals Theorem und und dem Satz von Pappos ?

c) Seien a und b zwei Punkte auf einem Kegelschnitt und sei l deren Join. Wird der Punkt a nun entlang des Kegelschnittes in Richtung Punkt b verschoben, wird der Join l im Grenzfall zur Tangente an den Kegelschnitt durch $a = b$.

   Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Vorgehens drei Korollare von Pascals Theorem.

d) Werden die Punkte (oder Geraden) aus Pascals Theorem ins Unendliche verschoben, so ergeben sich weitere Spezialfälle. Bestimmen Sie drei solche Spezialfälle.

e) Kombinieren Sie Aufgabenteil c) und Aufgabenteil d) und konstruieren Sie weitere drei Spezialfälle.

f) Beweisen Sie: Gegeben sei die Parabel $y = x^2$. Werden für zwei beliebige Punkte der Parabel a und b die Tangenten t_a und t_b an die Parabel durch die Punkte a und b sowie deren Lote v_a und v_b gezeichnet, so ist die Gerade durch a und b parallel zu der Geraden durch die beiden Schnittpunkte s_1 von t_a mit v_b und s_2 von t_b mit v_a.