TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Lösungen zu Aufgabenblatt 2 (27. April 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 5. Rechnen mit Kreuzprodukt.
In einem Geometrieprogramm sei das Kreuzprodukt für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ implementiert. Darauf stützend, wie implementieren Sie die folgenden Aufgaben?

a) die Verbindungsgerade g zweier Punkte p_1 und p_2

b) den Schnittpunkt p zweier Geraden g_1 und g_2

c) die Parallele g' zu einer gegebenen Gerade g durch einen gegebenen Punkt p

d) die Gerade g durch einen gegebenen Punkt p mit Steigungswinkel α

Nehmen Sie an, dass alle Punkte und Geraden in homogenen Koordinaten vorliegen.

LÖSUNG:

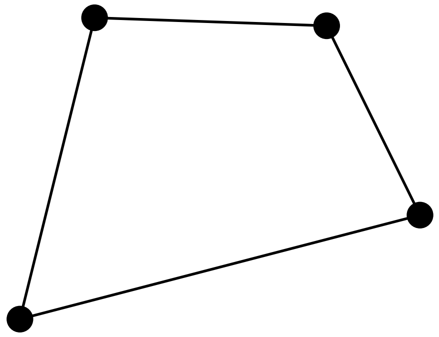
a) $g = p_1 \times p_2$,

b) $p = g_1 \times g_2$,

c) $p' = g \times \infty$, wobei ∞ die Gerade im Unendlichen (0,0,1) sei. Dann ist $g' = p \times p'$.

d) $p' = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$, der Punkt im Unendlichen in Richung der Steigung α. Nun $g' = p \times p'$.

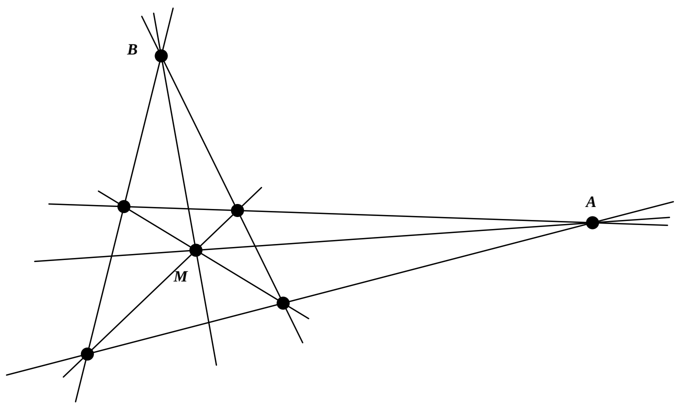
Aufgabe 6. Projektives Konstruieren.
Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie eines Schachbretts:



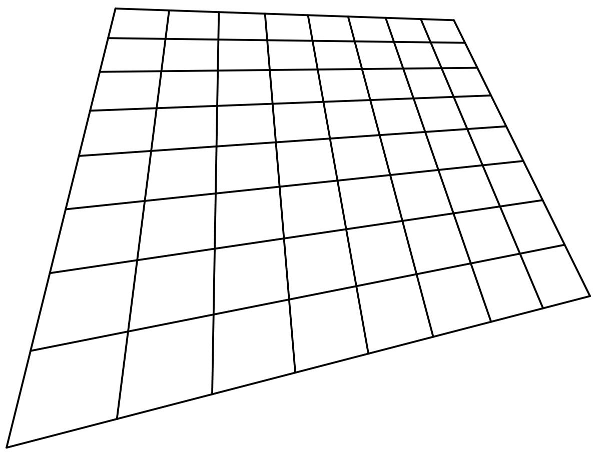
Zeichnen Sie die fehlenden Felder des Schachbrettes *perspektivisch richtig* ein.

LÖSUNG:

Zur Lösung dieser Aufgabe muss man sich nur auf die grundlegenden Eigenschaften projektiver Geometrie besinnen:
Euklidisch parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen.
Schnittpunkte von Geraden bleiben unter projektiven Transformationen erhalten.
Sich gegenüberliegende Seiten des Schachbretts sind natürlich parallel. Ihre jeweiligen Schnittpunkte im Unendlichen werden unter der gewählten Perspektive ($\sim$ Projektive Transformation / „Schiefdraufschauen“) sichtbar: Die so bestimmten Schnittpunkte werden im untenstehenden Bild mit A und B bezeichnet.
Da der Schnitt von Geraden erhalten bleibt, lässt sich durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen der perspektivisch richtige Mittelpunkt M des Schachbretts bestimmen.
Die Gerade durch (M und A) bzw. (M und B) teilen dann das Schachbrett perspektivisch richtig in obere und untere bzw. rechte und linke Spielbretthälfte ein.

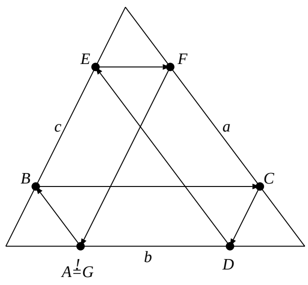


Wiederholt man obiges Verfahren, erhält man schliesslich folgendes Ergebnis des perspektivisch richtig gezeichneten Schachbretts:



— Hausaufgaben —

Aufgabe 7. Affin $\leftrightarrow$ Projektiv.
In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c sei ein beliebiger Punkt A auf b gegeben. Die Parallele zu a durch A schneidet c in einem Punkt B (siehe Abbildung), die Parallele zu b durch B schneidet a in einem Punkt C, usw. bis Punkt G.



Beweisen Sie, dass die Punkte A und G immer aufeinander liegen. Was hat dies mit dem Satz von Pappos zu tun?

<u>LÖSUNG:</u>

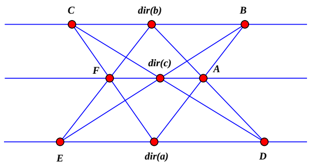
Diese Aufgabe lässt sich mithilfe der vielen vorhandenen Parallelogramme geometrisch lösen: Es gilt

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG = AB + DE + CD + FG + EF + BC = a + c + b,$$

wobei XY den Vektor von X nach Y bezeichne und a, b, c die durch die Dreiecksseiten gegebenen (mathematisch positiv durchlaufenen) Vektoren.

Der Zusammenhang mit dem Satz von Pappos läßt sich wie folgt herleiten:

Die Gerade durch die Dreiecksseite a, die Gerade durch die beiden Punkte A, B und die Gerade durch die beiden Punkte D, E schneiden sich aufgrund ihrer ParallelitŁt im Unendlichen. Ihr Schnittpunkt werde mit $dir(a)$ bezeichnet. Analog lassen sich die beiden Punkte $dir(b)$ und $dir(c)$ auf der Geraden im Unendlichen bestimmen. Die neun Punkte des Satz von Pappos sind nun die Punkte A bis F sowie die drei Punkte $dir(a)$, $dir(b)$ und $dir(c)$.



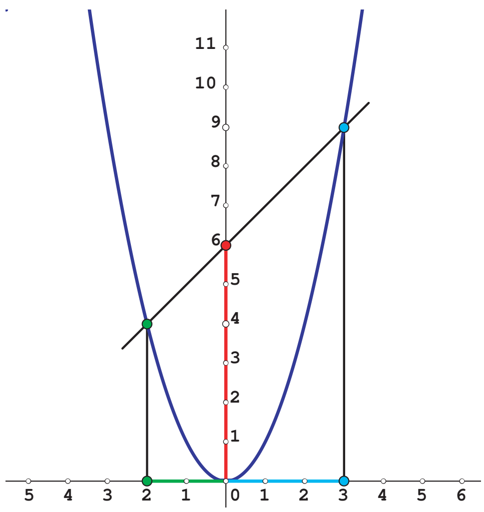
Nach Konstruktion liegen die drei Punkte C, B, $dir(b)$ und die drei Punkte E, D, $dir(a)$ jeweils auf einer Geraden. Nach Satz von Pappos sind dann auch die drei Punkte A, F und $dir(c)$ kollinear.

Da die Gerade durch B und E ebenfalls den Punkt $dir(c)$ enthält, muss die Gerade durch B und E zur Geraden durch A und F parallel sein. Daraus folgt $A = G$.

Aufgabe 8. Kreuzprodukt und Beweisen.

a) Bestimmen Sie in der Standardeinbettung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$ der euklidischen Ebene in $\mathbb{RP}^2$ die homogenen Koordinaten der beiden Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^2$.

b) In der Mathematikausstellung ix-quadrat steht folgendes Exponat (siehe Abb, rechts):
Will man zwei Zahlen x und y miteinander multiplizieren, so fällt man in $\mathbb{R}^2$ von $(-x, 0)$ und von $(y, 0)$ das Lot auf eine Normalparabel. Schneidet man die Verbindungsgerade dieser beiden Parabelpunkte mit der y-Achse, so landet man genau im Punkt $(0, x \cdot y)$. Beweisen Sie diese Eingenschaft mit Hilfe von homogenen Koordinaten und dem Kreuzprodukt.



LÖSUNG:

a) x-Achse: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y-Achse: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

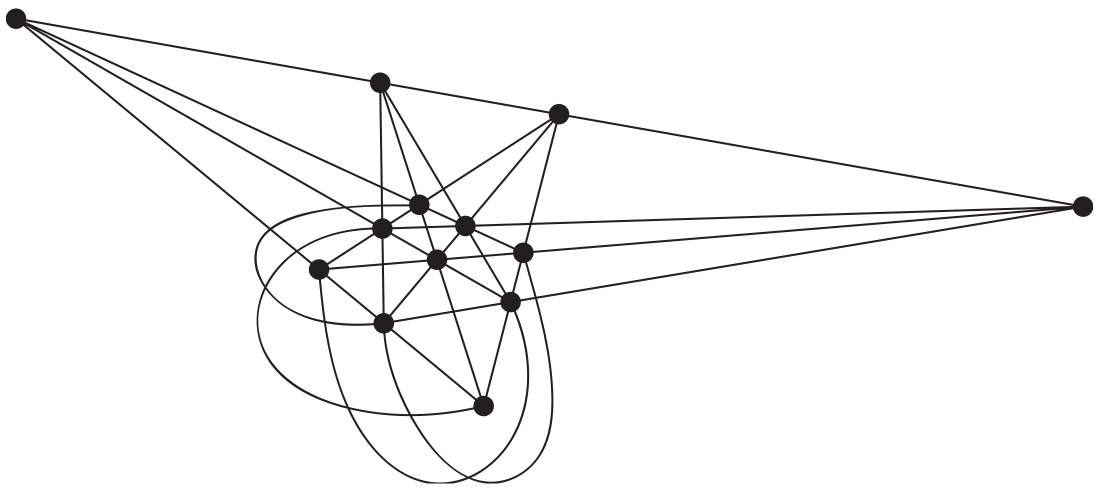
b) Es gilt

$$\left[\begin{pmatrix} -x \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y \\ y^2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ x+y \\ -xy^2-x^2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -xy^2-x^2y \\ -(x+y) \end{pmatrix} = -(x+y) \begin{pmatrix} 0 \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9. Endliche Ebenen.
Das Bild zeigt die endliche projektive Ebene über dem Körper $GF_3 = (\{0,1,2\}, +, \cdot)$.

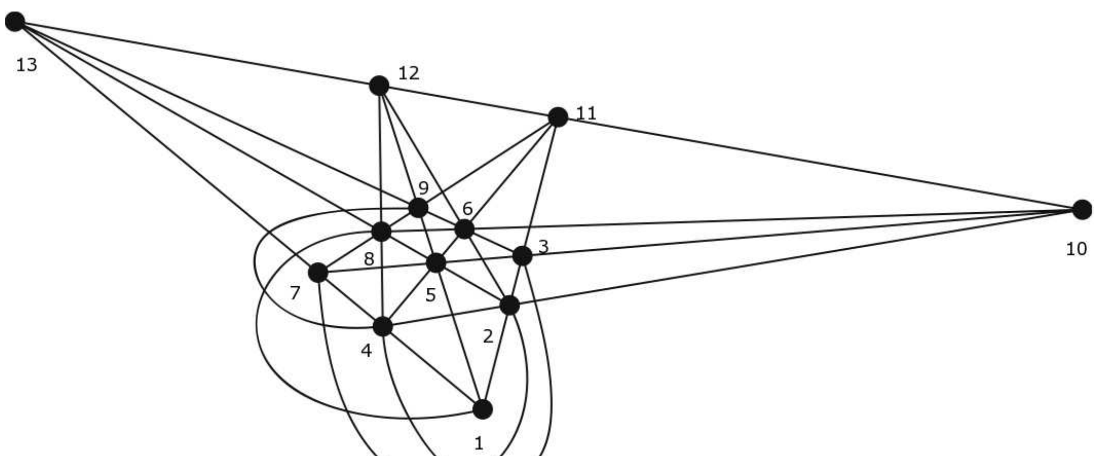
a) Schreiben Sie homogene Koordinaten an die Punkte.

b) Überzeugen Sie sich davon, dass der Satz von Pappos in dieser Ebene gilt. Heben Sie dazu mindestens eine Pappos-Konfiguration in der Zeichnung hervor (zum Beispiel in rot).



LÖSUNG:

a) Wir nummerieren die 13 Punkte von 1 bis 13:



Die homogenen Koordinaten für die ersten 9 Punkte lassen sich sofort hinschreiben (es sind die „endlichen Punkte“). Die homogenen Koordinaten für die übrigen 4 Punkte (im Unendlichen) lassen sich mithilfe des Kreuzproduktes (und des Skalarproduktes) ermitteln.

Punkt $1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt $2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt $3 : \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt $4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt $5 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt $6 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt $7 : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt $8 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Punkt $9 : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt $10 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Punkt $11 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Punkt $12 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Punkt $13 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die homogenen Koordinaten für die ersten 9 Punkte lassen sich sofort hinschreiben (es sind die „endlichen Punkte“). Die homogenen Koordinaten für die übrigen 4 Punkte lassen sich mithilfe des Kreuzproduktes (und des Skalarproduktes) leicht ermitteln:

b) Satz von Pappos: Wählt man zum Beispiel die Punkte 1,4 und 7, sowie die Punkte 10, 11 und 12 und die entsprechenden Verbindungsgeraden, so sind die Punkte 2, 5 und 8 in der Tat kollinear.