TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)

— Aufgabenblatt 2 (27. April 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 5. Rechnen mit Kreuzprodukt.
In einem Geometrieprogramm sei das Kreuzprodukt für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ implementiert. Darauf stützend, wie implementieren Sie die folgenden Aufgaben?

a) die Verbindungsgerade g zweier Punkte p_1 und p_2

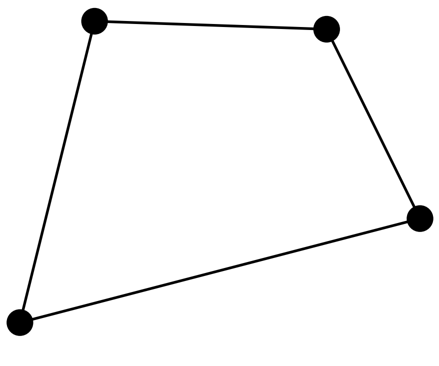
b) den Schnittpunkt p zweier Geraden g_1 und g_2

c) die Parallele g' zu einer gegebenen Gerade g durch einen gegebenen Punkt p

d) die Gerade g durch einen gegebenen Punkt p mit Steigungswinkel α

Nehmen Sie an, dass alle Punkte und Geraden in homogenen Koordinaten vorliegen.

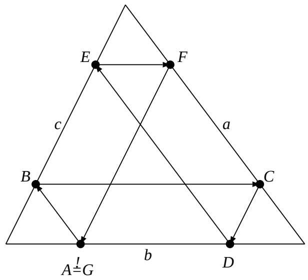
Aufgabe 6. Projektives Konstruieren.
Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie eines Schachbretts:



Zeichnen Sie die fehlenden Felder des Schachbrettes *perspektivisch richtig* ein.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 7. Affin $\leftrightarrow$ Projektiv.
In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c sei ein beliebiger Punkt A auf b gegeben. Die Parallele zu a durch A schneidet c in einem Punkt B (siehe Abbildung), die Parallele zu b durch B schneidet a in einem Punkt C, usw. bis Punkt G.

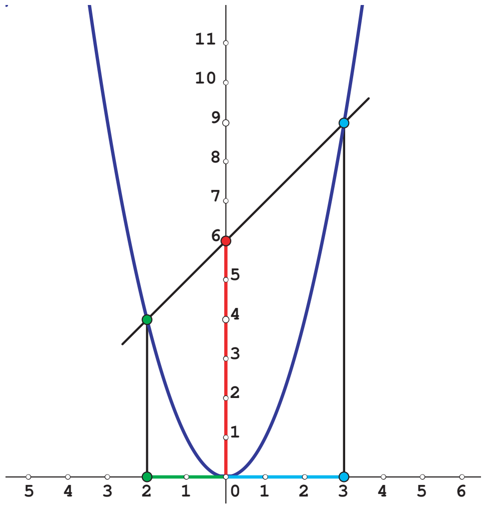


Beweisen Sie, dass die Punkte A und G immer aufeinander liegen. Was hat dies mit dem Satz von Pappos zu tun?

Aufgabe 8. Kreuzprodukt und Beweisen.

a) Bestimmen Sie in der Standardeinbettung $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$ der euklidischen Ebene in $\mathbb{RP}^2$ die homogenen Koordinaten der beiden Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^2$.

b) In der Mathematikausstellung ix-quadrat steht folgendes Exponat (siehe Abb, rechts):
Will man zwei Zahlen x und y miteinander multiplizieren, so fällt man in $\mathbb{R}^2$ von $(-x, 0)$ und von $(y, 0)$ das Lot auf eine Normalparabel. Schneidet man die Verbindungsgerade dieser beiden Parabelpunkte mit der y-Achse, so landet man genau im Punkt $(0, x \cdot y)$. Beweisen Sie diese Eingenschaft mit Hilfe von homogenen Koordinaten und dem Kreuzprodukt.



Aufgabe 9. Endliche Ebenen.
Das Bild zeigt die endliche projektive Ebene über dem Körper $GF_3 = (\{0, 1, 2\}, +, \cdot)$.

a) Schreiben Sie homogene Koordinaten an die Punkte.

b) Überzeugen Sie sich davon, dass der Satz von Pappos in dieser Ebene gilt. Heben Sie dazu mindestens eine Pappos-Konfiguration in der Zeichnung hervor (zum Beispiel in rot).