TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)
— Lösungen zu Aufgabenblatt 1 (20. April 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 1. Dualität.
Zeigen Sie: Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine projektive Ebene, so ist auch $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}')$ eine projektive Ebene, wobei $\mathcal{I}' \in \mathcal{L} \times \mathcal{P}$ definiert ist durch

$$l\mathcal{I}'p \quad \Longleftrightarrow \quad p\mathcal{I}l.$$

<u>LÖSUNG:</u>
Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine projektive Ebene, dann gelten die folgenden drei Axiome:

Ax(i): Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.

Ax(ii): Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Ax(iii): Es gibt vier voneinander verschiedene Punkte A, B, C, D, so dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen.

Die Behauptung ist, dass dann $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}')$ mit $\mathcal{I}' \in \mathcal{L} \times \mathcal{P}$ definiert durch $l\mathcal{I}'p \Leftrightarrow p\mathcal{I}l$ ebenfalls eine projektive Ebene ist. Dazu ist zu zeigen:

Ax'(i): Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Ax'(ii): Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.

Ax'(iii): Es gibt vier voneinander verschiedene Geraden a, b, c, d, so dass sich keine drei von ihnen in einem Punkt schneiden.

Es gilt $Ax'(i) \Leftrightarrow Ax(ii)$ und $Ax'(ii) \Leftrightarrow Ax(i)$.
Also ist noch $Ax'(iii)$ zu zeigen: Dazu seien A, B, C, D die vier Punkte aus $Ax(iii)$. Dann sind die vier Geraden

$$a = A \vee B, \quad b = B \vee C, \quad c = C \vee D, \quad d = D \vee A$$

vier voneinander verschiedene Geraden. (Angenommen, zwei Geraden sind identisch, dann folgt daraus sofort, dass drei der Punkte a, b, c, d auf dieser Geraden liegen müssen; Widerspruch zu Ax(iii).)
Wir bestimmen nun alle sechs Schnittpunkte $a \wedge b$, $a \wedge c$, $a \wedge d$, $b \wedge c$, $b \wedge d$, $c \wedge d$ dieser vier Geraden:
Es ist

$$a \wedge b = (A \vee B) \wedge (B \vee C) = B$$

wegen $B\mathcal{I}a$ und $B\mathcal{I}b$ und $Ax'(i)$.
Mit analogem Argument gilt

$$a \wedge d = (A \vee B) \wedge (D \vee A) = A$$
$$b \wedge c = (B \vee C) \wedge (C \vee D) = C$$
$$c \wedge d = (C \vee D) \wedge (D \vee A) = D.$$

Die beiden übrigen Schnittpunkte seien mit P_1 und P_2 ($P_1, P_2 \in \mathcal{P}$) bezeichnet:

$$a \wedge c = (A \vee B) \wedge (C \vee D) = P_1$$

$$b \wedge d = (B \vee C) \wedge (D \vee A) = P_2$$

Nun ist noch zu zeigen, dass alle diese sechs Schnittpunkte voneinander verschieden sind:
Die Punkte A, B, C, D sind nach Voraussetzung ($Ax(iii)$) voneinander verschieden.

Der Punkt P_1 ist mit keinem dieser vier Punkte identisch, denn angenommen o.B.d.A. $P_1 = A$, dann folgt wegen $P_1 \mathcal{I} c$ sofort $A \mathcal{I} c$ und somit, dass die drei Punkte A, C, D auf derselben Geraden liegen; Widerspruch zu Ax(iii).
Mit analogem Argument folgt, dass der Punkt P_2 mit keinem der vier Punkte A, B, C, D identisch ist.
Ausserdem gilt $P_1 \neq P_2$, denn angenommen $P_1 = P_2$, dann gilt, dass jeder der beiden Punkte inzident mit den vier Geraden a, b, c, d ist, woraus dann aber folgt, dass drei der vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden liegen; Widerspruch zu $Ax(iii)$.
Somit sind alle sechs Schnittpunkte voneinander verschieden, woraus folgt, dass sich keine drei der vier Geraden in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2. Homogene Koordinaten.
Zeichnen Sie die folgenden Objekte in der gewöhnlichen (x, y)-Ebene (eingebettet in den $\mathbb{R}^3$ mit der Ebene $z = 1$):

a) Punkte mit homogenen Koordinaten:
$p_1 = (0, 0, 3), \quad p_2 = (2, 1, 1), \quad p_3 = (7, -5, 2), \quad p_4 = (1, 1, 0)$

b) Geraden mit homogenen Koordinaten:
$l_1 = (1, 0, 1), \quad l_2 = (1, 1, 2), \quad l_3 = (1, 1, 4), \quad l_4 = (0, 0, 1), \quad l_5 = (1, 1, 0), \quad l_6 = (4, 3, 12)$

c) Ein Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$ ist die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c + d \cdot xy + e \cdot x + f \cdot y = 0$. Homogenisiert erhält man eine homogene Gleichung 2. Grades in den Variablen x, y und z, nämlich die Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot xz + f \cdot yz = 0$. Man kann sie auch in Matrixform schreiben:

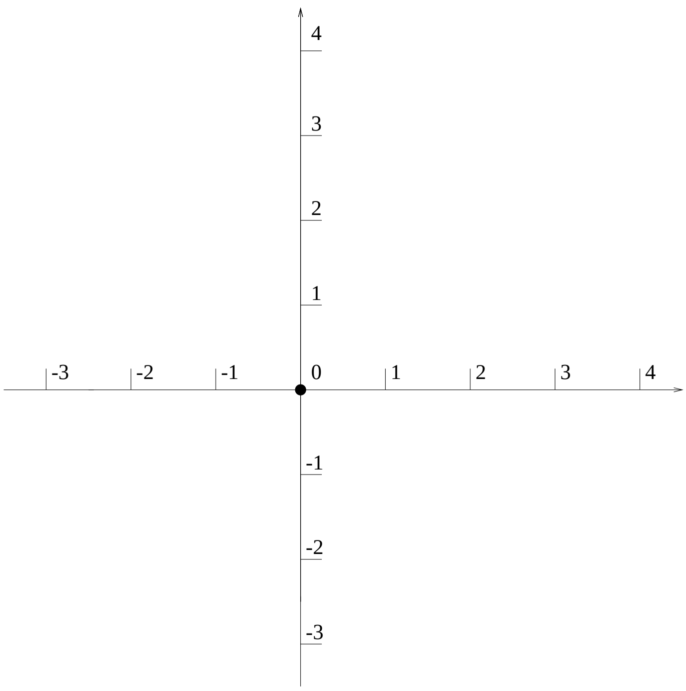
$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a & d' & e' \\ d' & b & f' \\ e' & f' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

wobei $d' = d/2$, $e' = e/2$, $f' = f/2$. Zeichnen Sie die Kegelschnitte mit den Matrizen:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

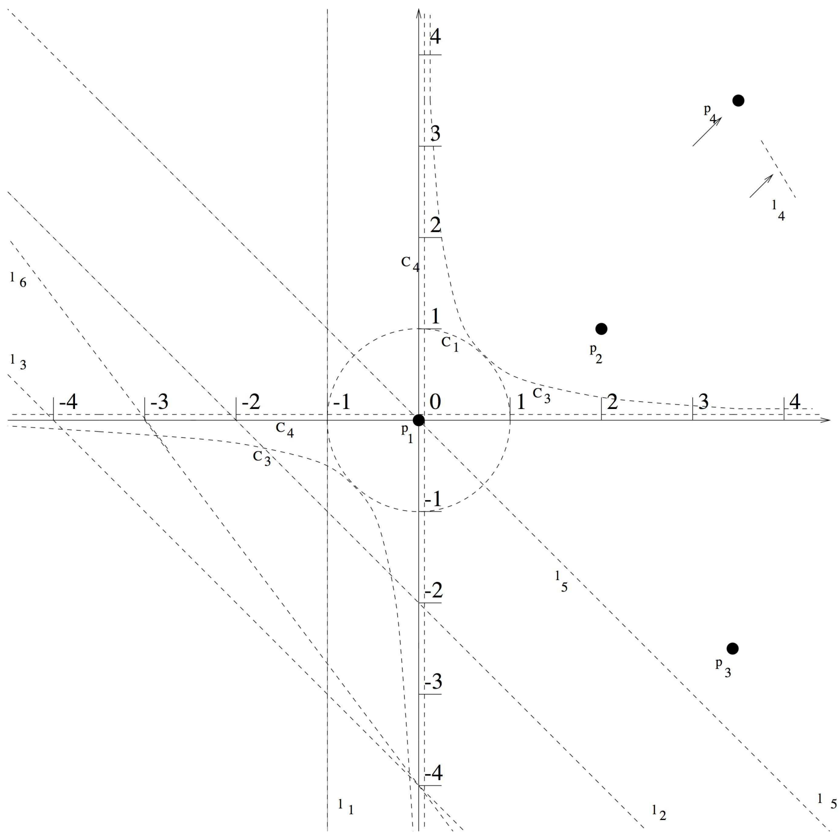
d)* Können Sie diese Objekte interpretieren, wenn Sie statt der Ebene $z = 1$ die Ebene $x + y + z = 1$ nehmen?

Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem:



LÖSUNG:

a)-c)



Der Punkt p_4 befindet sich im Unendlichen in Richtung des angegebenen Pfeils. l_4 ist die Gerade im Unendlichen. C_2 ist der leere Kegelschnitt.

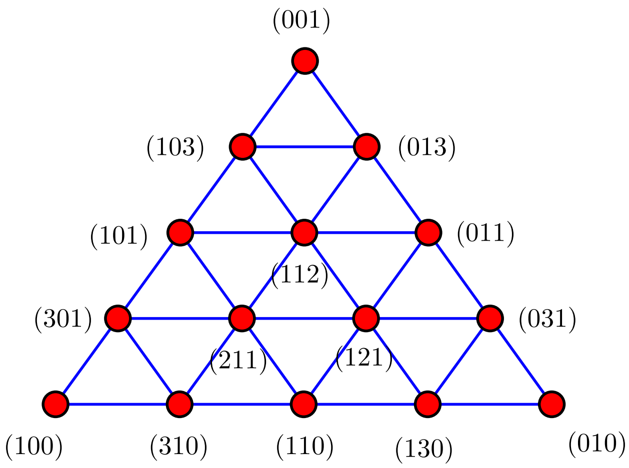
Um aus den Punkten in homogenen Koordinaten die zugehörigen Punkte in $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen, schreibe man die Vektoren als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um die Geraden in $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen, bestimme man mithilfe der Gleichung $ax + by + cz = 0$ zwei Punkte $(x_1, y_1, 1)$ und $(x_2, y_2, 1)$, die auf der Geraden liegen.

Um die Kegelschnitte zu bestimmen, setze man jeweils die vorgegeben Werte in die Kegelschnittgleichung (mit $z = 1$) ein.

d)* Die Ebene mit der Gleichung $x + y + z = 1$ ist die affine Ebene, die durch die Spitzen der drei Einheitsvektoren erzeugt wird. Wir können uns diese Ebene als Ebene des $\mathbb{R}^2$ wie folgt vorstellen (angegeben sind die jeweiligen *homogenen* Koordinaten der entsprechenden Punkte):



Nun können die Punkte p_1, p_2 und p_4 sofort in diese Ebene gezeichnet werden. Man beachte, dass Punkt p_4 nun nicht mehr im Unendlichen liegt. Für Punkt p_3 müssen wir noch etwas rechnen: Wegen $7 - 5 + 2 = 4$ gilt

$$p_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Somit liegt der Durchstosspunkt durch die Ebene $x + y + z = 1$ bei $(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$. Wo liegt dieser Punkt in der Darstellung unserer Ebene?

Für die Geraden geht man mit den beiden die Gerade definiernden Punkten entsprechend vor.

Für die Kegelschnitte betrachte man - im wahrsten Sinne des Wortes - die zugehörigen Kegel-Schnitte.

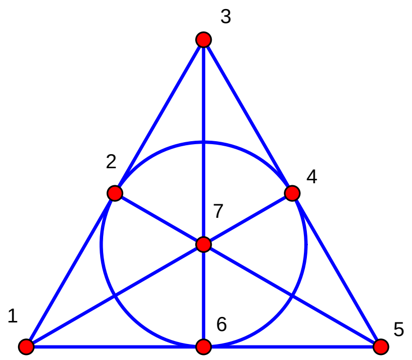
— *Hausaufgaben* —

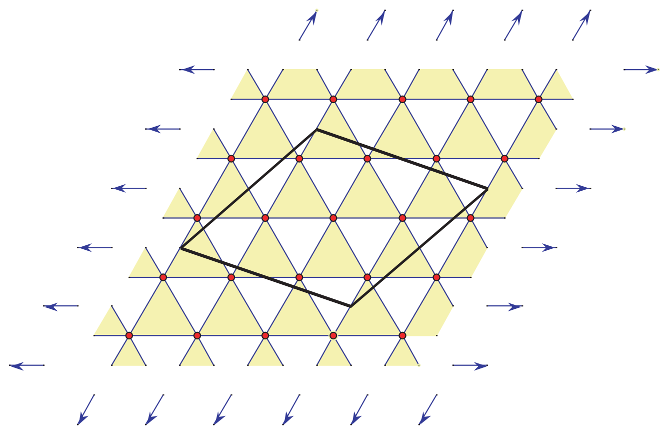
Aufgabe 3. Symmetrie der Fano-Ebene.
Endliche projektive Ebenen sind bemerkenswerte symmetrische Gebilde. Ein Automorphismus einer projektiven Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ist eine bijektive Abbildung $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, so dass $a, b, c \in \mathcal{P}$ kollinear sind, genau dann wenn $f(a), f(b), f(c)$ kollinear sind. Wir wollen die Automorphismen der Fano-Ebene analysieren:

a) Betrachten Sie die Fano-Ebene bestehend aus den Geraden

$$(1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 1), (1, 4, 7), (3, 6, 7), (5, 2, 7), (2, 4, 6).$$

Das nebenstehende Dreiecksgitter soll in alle Richtungen unendlich fortgesetzt sein. Tragen Sie die Zahlen $1 \dots 7$ so an die Ecken des Dreiecksgitters ein, dass jedes gelbe Dreieck einer Geraden der Fano-Ebene entspricht und in der markierten Raute jede Zahl genau einmal vorkommt (Invarianz unter Verschiebungen).





b) Markieren Sie die Ecken, die das Label “1” bekommen haben. Was können Sie beobachten? Welcher Zusammenhang besteht zu einem *Torus*?

c) Geben Sie mehrere Automorphismen τ der Fano-Ebene an, die die Gleichung $\tau^7 = id$ erfüllen. Geben Sie mehrere Automorphismen τ der Fano Ebene an, die die Gleichung $\tau^3 = id$ erfüllen.

d) Wie viele verschiedene Lösungen zu Aufgabenteil a) können Sie durch Drehung und Verschiebung aus Ihrer Lösung erzeugen?

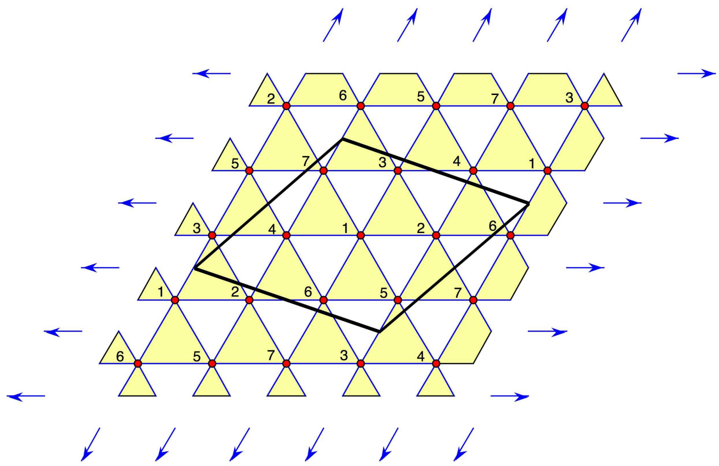
e) Halten Sie nun die Ecken ihres Dreiecks $(1, 2, 3)$ fest. Wie viele Lösugen zu Aufgabenteil a) gibt es dann noch?

f) Wie groß ist die Automorphismengruppe der Fano-Ebene?

g) Bestimmen Sie die Anzahl aller invertierbaren 3×3 Matrizen b̈er dem Körper $GF_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$.

LÖSUNG:

a) Eine Möglichkeit, das Dreiecksgitter im Sinne der Aufgabenstellung richtig auszufüllen, ist die folgende:



b) Der Zusammenhang zum Torus ist bereits durch die Aufgabenstellung in Teilaufgabe a) gegeben, nämlich durch die Forderung, dass in der markierten Raute jede der sieben Zahlen nur genau einmal vorkommen darf. Zeichen wir Parallelogramme, die lauter 1en als Eckpunkte haben, bilden diese jeweils ein topologisches Schnittmuster für einen Torus.

c) Ein Automorphismus der Fano-Ebene entspricht einer bijektiven Abbildung des Dreiecksgitters, welche gelbe Dreiecke wieder auf gelbe Dreiecke abbildet.

Automorphismen τ mit $\tau^7 = id$ sind zum Beispiel die folgenden Automorphismen:

$\tau_1 : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ mit $1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 6,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 1,\ 5 \mapsto 7,\ 6 \mapsto 5,\ 7 \mapsto 3$

$\tau_2 : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ mit $1 \mapsto 6,\ 2 \mapsto 5,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 2,\ 5 \mapsto 3,\ 6 \mapsto 7,\ 7 \mapsto 4$

Automorphismen τ mit $\tau^3 = id$ sind zum Beispiel die folgenden Automorphismen:

$\tau_3 : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ mit $1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 7,\ 3 \mapsto 4,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 3,\ 6 \mapsto 2,\ 7 \mapsto 6$

$\tau_4 : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ mit $1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 6,\ 3 \mapsto 5,\ 4 \mapsto 3,\ 5 \mapsto 4,\ 6 \mapsto 7,\ 7 \mapsto 2$

d) Es gibt 7 Verschiebungen (inklusive Identität), um aus der Lösung zu Aufgabenteil a) eine weitere Lösung zu produzieren. Jeder der 7 Punkte kann als Drehzentrum gewählt werden, und zu jedem Drehzentrum gibt es jeweils 3 Drehungen (inklusive Identität). Somit gibt es $7 \cdot 3 = 21$ verschiedene Möglichkeiten mithilfe von Verschiebungen und Drehungen aus der Lösung zu Aufgabenteil a) weitere Lösungen zu Aufgabenteil a) zu produzieren.

e) Wird das erste Dreieck $(1,2,3)$ festgehalten, gibt es noch 4 Möglichkeiten, das Dreiecksgitter aufzufüllen: Die beiden anderen Dreiecke, die die 1 noch als Eckpunkt haben (also die beiden anderen Geraden der Fano-Ebene, die inzident zur 1 sind) können vertauscht und innerhalb der Dreiecke können die Eckpunkte jeweils vertauscht werden (Spiegelungen).

f) Da zu Beginn des Ausfüllens des Dreiecksgitters auch noch die beiden Eckpunkte 2 und 3 des ersten Dreiecks $(1,2,3)$ miteinander vertauscht werden können, gibt es also insgesamt $2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 = 8 \cdot 21 = 168$ Automorphismen der Fano-Ebene.

g) Die Anzahl aller invertierbaren 3×3-Matrizen über dem Körper $GF_2 = (\{0,1\},+,\cdot)$ ist auch 168 - wie man durch kombinatorisches Auffüllen der entsprechenden Determinanten mit 0, 1 und 2 nachvollziehen kann.

Aufgabe 4. (n_r)**-Konfigurationen.**
Eine Inzidenzstruktur ist ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ bei dem $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ eine Inzidenzrelation ist, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Zu zwei “Punkten” $p, q \in P$ gibt es *höchstens* ein $l \in \mathcal{L}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $q\mathcal{I}l$.

(ii) Zu zwei “Geraden” $l, m \in L$ gibt es *höchstens* ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $p\mathcal{I}m$.

Wir nennen $\mathcal{P}$ die Punkte und $\mathcal{L}$ die Geraden der Inzidenzstruktur.

Eine (n_r)-Konfiguration ist eine Inzidenzstruktur mit n Punkten und n Geraden, bei der auf jeder Geraden r Punkte liegen und durch jeden Punkt r Geraden gehen.

a) Geben Sie (alle) (7_3)-Konfigurationen an.

b) Geben Sie (alle) (8_3)-Konfigurationen an.

c) Geben Sie (alle) (9_3)-Konfigurationen an.

d) Wie sehen (n_2)-Konfigurationen aus?

e) Geben Sie eine (13_4)-Konfiguration an.

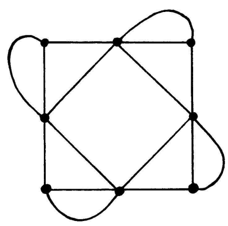
Wenn möglich, fertigen Sie Skizzen der Konfigurationen in der euklidischen Ebene an, bei denen alle Geraden auch wirklich gerade sind.

<u>LÖSUNG:</u>

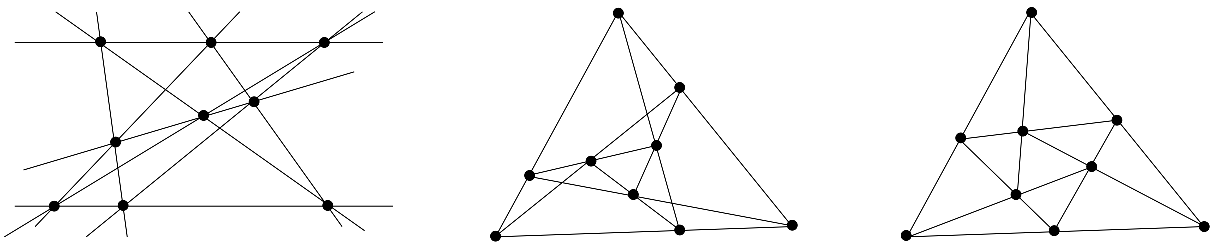
Diese Aufgabe ist (fast) reine Kombinatorik.

a) Es gibt genau eine (7_3)-Konfiguration, und das ist die Fano-Ebene.

b) Es gibt genau eine (8_3)-Konfiguration - sie lässt sich nicht mit ”geraden Geraden”darstellen.



c) Die (9_3)-Konfigurationen sind die folgenden:



Die erste Konfiguration entspricht dem Satz von Pappos.

d) Für die (n_2)-Konfigurationen verdeutliche man sich, dass sie alle Vereinigungen von Polygonen sein müssen, d.h. Vereinigung von l Polygonen mit den Punktzahlen k_1 bis k_l, wobei $k_1 + \ldots + k_l = n$ und $k_i \geq 3$ (jede Gerade durch zwei Punkte gegeben, jeder Punkt auf genau zwei Geraden).

e) (13_4)-Konfiguration: