TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, VANESSA KRUMMECK

Projektive Geometrie (Sommersemester 2005)

— Aufgabenblatt 1 (20. April 2005) —

— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 1. Dualität.
Zeigen Sie: Ist $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ eine projektive Ebene, so ist auch $(\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}')$ eine projektive Ebene, wobei $\mathcal{I}' \in \mathcal{L} \times \mathcal{P}$ definiert ist durch

$$l\mathcal{I}'p \quad \Longleftrightarrow \quad p\mathcal{I}l.$$

Aufgabe 2. Homogene Koordinaten.
Zeichnen Sie die folgenden Objekte in der gewöhnlichen (x, y)-Ebene (eingebettet in den $\mathbb{R}^3$ mit der Ebene $z = 1$):

a) Punkte mit homogenen Koordinaten:
$p_1 = (0, 0, 3),\ \ p_2 = (2, 1, 1),\ \ p_3 = (7, -5, 2),\ \ p_4 = (1, 1, 0)$

b) Geraden mit homogenen Koordinaten:
$l_1 = (1, 0, 1),\ \ l_2 = (1, 1, 2),\ \ l_3 = (1, 1, 4),\ \ l_4 = (0, 0, 1),\ \ l_5 = (1, 1, 0),\ \ l_6 = (4, 3, 12)$

c) Ein Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$ ist die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c + d \cdot xy + e \cdot x + f \cdot y = 0$. Homogenisiert erhält man eine homogene Gleichung 2. Grades in den Variablen x, y und z, nämlich die Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot xz + f \cdot yz = 0$. Man kann sie auch in Matrixform schreiben:

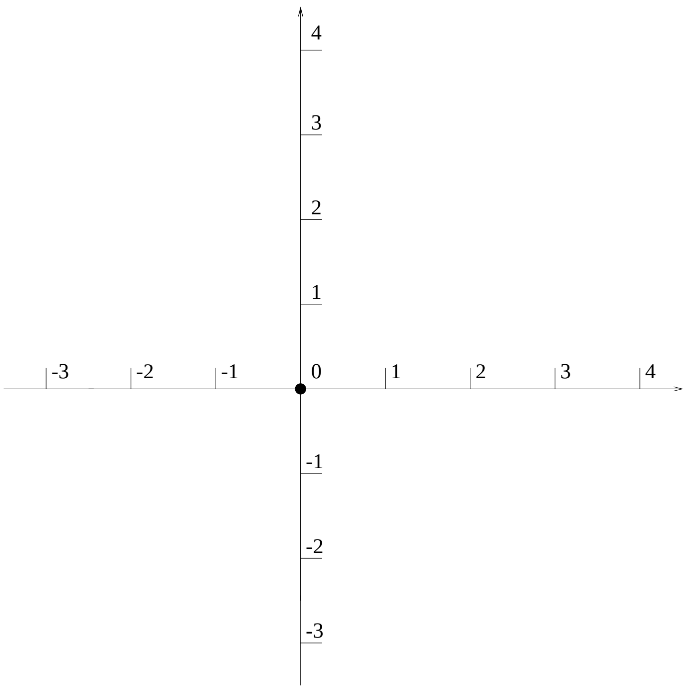
$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a & d' & e' \\ d' & b & f' \\ e' & f' & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

wobei $d' = d/2$, $e' = e/2$, $f' = f/2$. Zeichnen Sie die Kegelschnitte mit den Matrizen:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)* Können Sie diese Objekte interpretieren, wenn Sie statt der Ebene $z = 1$ die Ebene $x + y + z = 1$ nehmen?

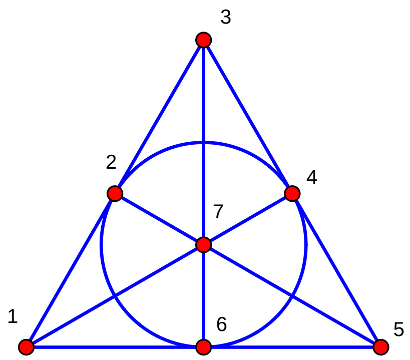
Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem:

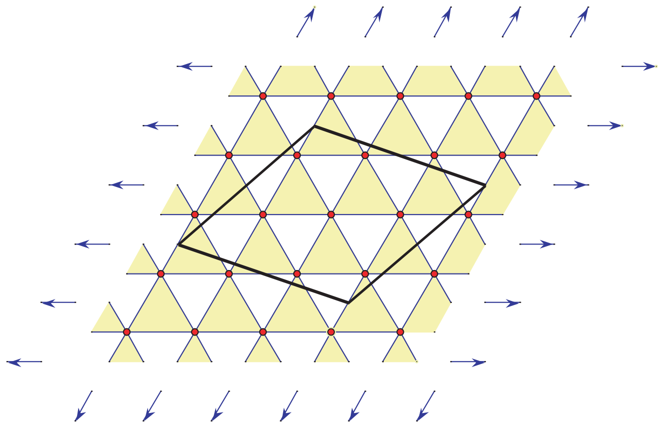


— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 3. Symmetrie der Fano-Ebene.
Endliche projektive Ebenen sind bemerkenswerte symmetrische Gebilde. Ein Automorphismus einer projektiven Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ist eine bijektive Abbildung $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, so dass $a, b, c \in \mathcal{P}$ kollinear sind, genau dann wenn $f(a), f(b), f(c)$ kollinear sind. Wir wollen die Automorphismen der Fano-Ebene analysieren:

a) Betrachten Sie die Fano-Ebene bestehend aus den Geraden
$$(1,2,3), (3,4,5), (5,6,1), (1,4,7), (3,6,7), (5,2,7), (2,4,6).$$
Das nebenstehende Dreiecksgitter soll in alle Richtungen unendlich fortgesetzt sein. Tragen Sie die Zahlen $1 \ldots 7$ so an die Ecken des Dreiecksgitters ein, dass jedes gelbe Dreieck einer Geraden der Fano-Ebene entspricht und in der markierten Raute jede Zahl genau einmal vorkommt (Invarianz unter Verschiebungen).





b) Markieren Sie die Ecken, die das Label "1" bekommen haben. Was können Sie beobachten? Welcher Zusammenhang besteht zu einem *Torus*?

c) Geben Sie mehrere Automorphismen τ der Fano-Ebene an, die die Gleichung $\tau^7 = id$ erfüllen. Geben Sie mehrere Automorphismen τ der Fano Ebene an, die die Gleichung $\tau^3 = id$ erfüllen.

d) Wie viele verschiedene Lösungen zu Aufgabenteil a) können Sie durch Drehung und Verschiebung aus Ihrer Lösung erzeugen?

e) Halten Sie nun die Ecken ihres Dreiecks $(1, 2, 3)$ fest. Wie viele Lösugen zu Aufgabenteil a) gibt es dann noch?

f) Wie groß ist die Automorphismengruppe der Fano-Ebene?

g) Bestimmen Sie die Anzahl aller invertierbaren 3×3 Matrizen ¨ber dem Körper $GF_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot)$.

Aufgabe 4. (n_r)-Konfigurationen.
Eine Inzidenzstruktur ist ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ bei dem $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ eine Inzidenzrelation ist, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Zu zwei "Punkten" $p, q \in P$ gibt es *höchstens* ein $l \in \mathcal{L}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $q\mathcal{I}l$.

(ii) Zu zwei "Geraden" $l, m \in L$ gibt es *höchstens* ein $p \in \mathcal{P}$ mit $p\mathcal{I}l$ und $p\mathcal{I}m$.

Wir nennen $\mathcal{P}$ die Punkte und $\mathcal{L}$ die Geraden der Inzidenzstruktur.

Eine (n_r)-Konfiguration ist eine Inzidenzstruktur mit n Punkten und n Geraden, bei der auf jeder Geraden r Punkte liegen und durch jeden Punkt r Geraden gehen.

a) Geben Sie (alle) (7_3)-Konfigurationen an.

b) Geben Sie (alle) (8_3)-Konfigurationen an.

c) Geben Sie (alle) (9_3)-Konfigurationen an.

d) Wie sehen (n_2)-Konfigurationen aus?

e) Geben Sie eine (13_4)-Konfiguration an.

Wenn möglich, fertigen Sie Skizzen der Konfigurationen in der euklidischen Ebene an, bei denen alle Geraden auch wirklich gerade sind.