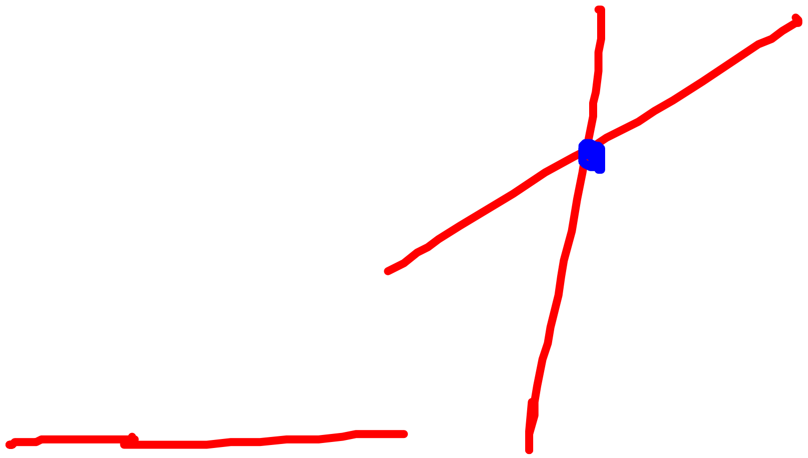
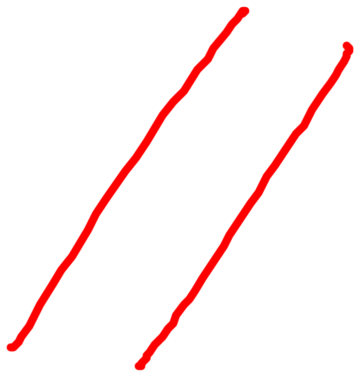
(5) Crashkurs Projektive Geometrie

Ein Zugang: Spezialfälle eliminieren

Zwei Geraden schneiden sich in der Ebene



sofern sie nicht parallel sind



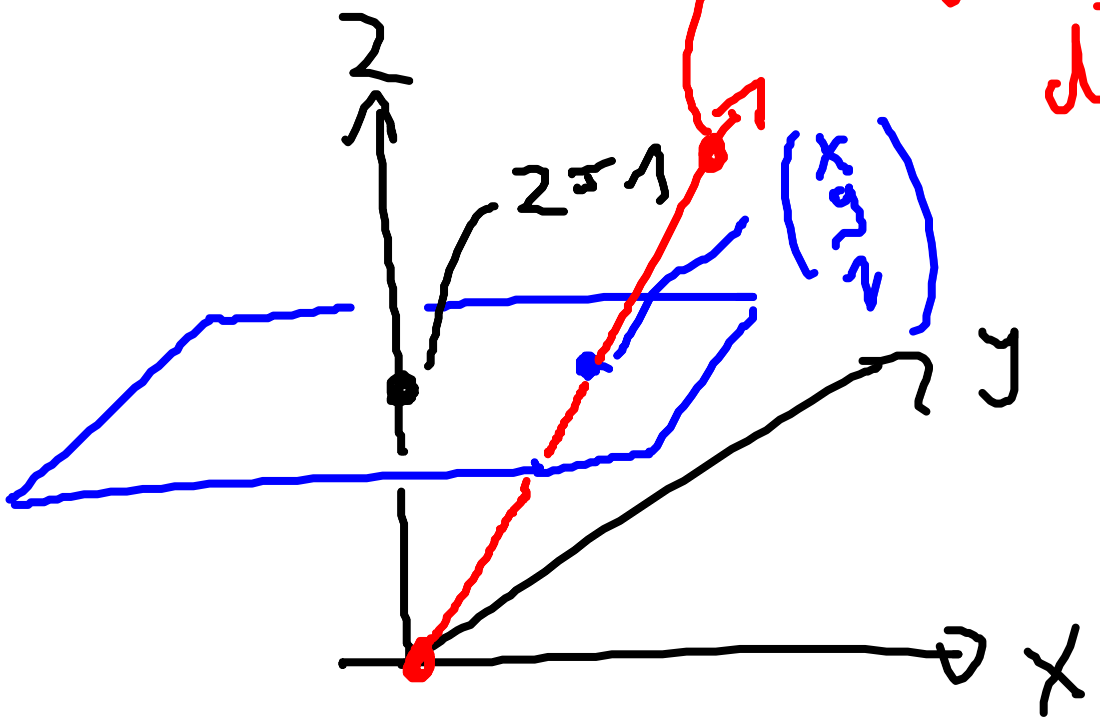
Anderer Zugang: Vereinheitlichung linearer und affiner Transformationen.

Idee: Bette die normale Zeichenebene in den $\mathbb{R}^3$ ein. als affine Ebene

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ homogenisieren

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x'/z' \\ y'/z' \end{pmatrix}$

dehomogenisieren



Bilde Äquivalenzklassen:

$[p] = \{\lambda p \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$p \neq 0$

Jede Äquivalenzklasse ist ein(!) ~~Punkt der projektiven Geometrie~~

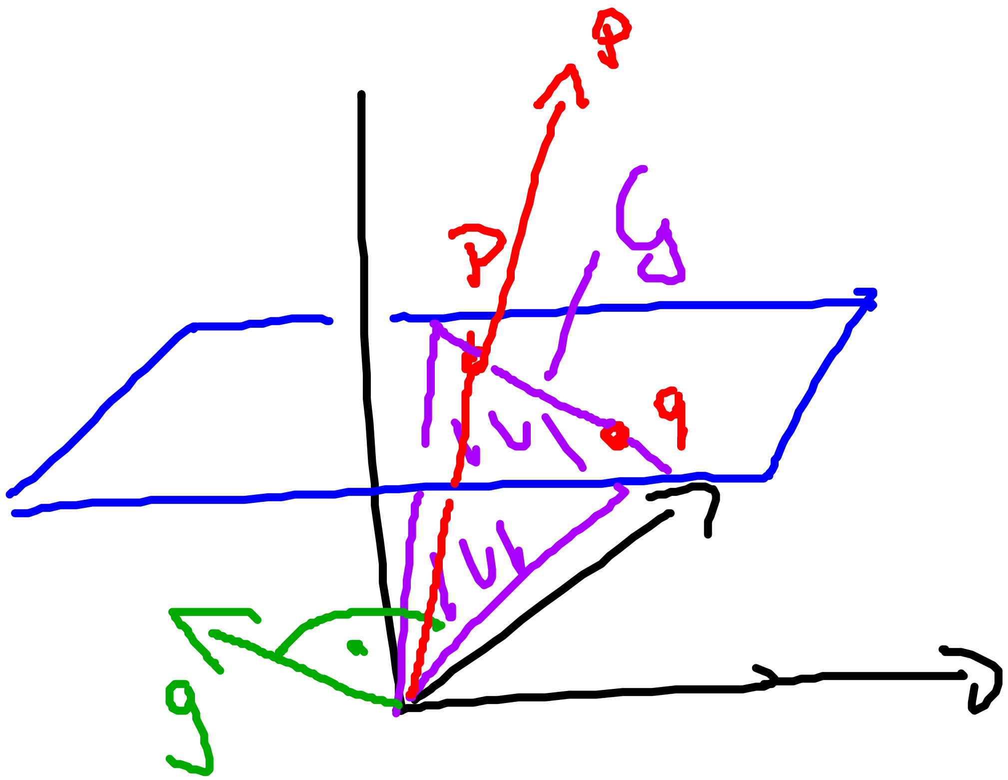
$$\boxed{P = \frac{\mathbb{R}^3 - \{0\}}{\mathbb{R} - \{0\}}}$$

Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $z \neq 0$

repräsentieren den Punkt $\begin{pmatrix} x/z \\ y/z \end{pmatrix}$ in der Ebene

Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ repräsentieren unendlich Fernen Punkt in Richtung $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Geraden



$$G = \frac{\mathbb{R}^3 - \{0\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$

Gerade ~ von G und dem Punkt 0 aufgespannten 2-dim Teilraum.

Repräsentiere G durch Normalenvektor g zum 2-dim. Teilraum.

Identifiziere skalare Vielfache

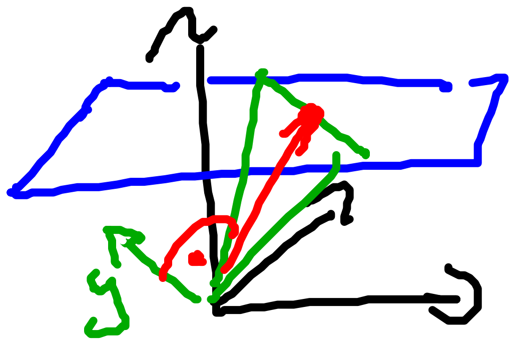
$$[g] = \{\lambda g \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

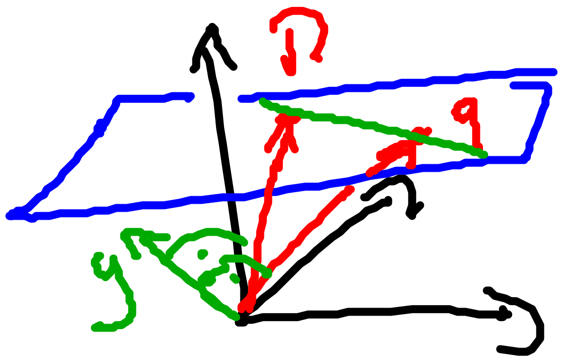
$g \neq 0$

Inzidenz: Wann liegt p auf g?

$$\langle p, g\rangle = 0 \iff xa + yb + zc = 0$$

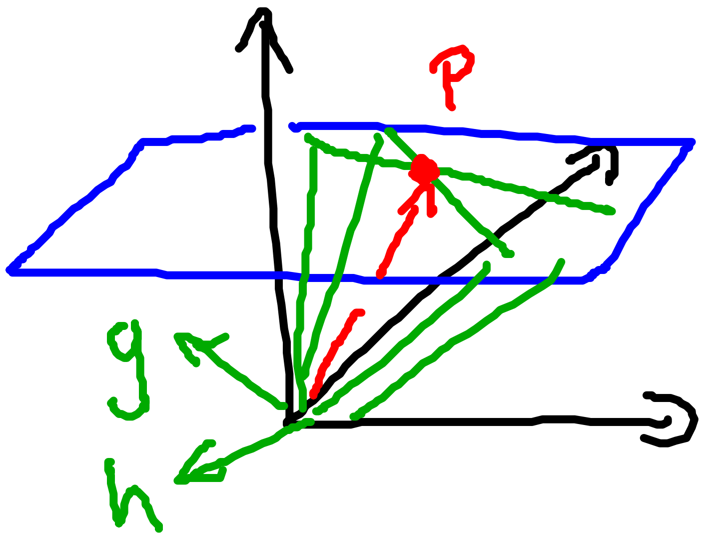
$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$





Verbindungsgerade von p und q

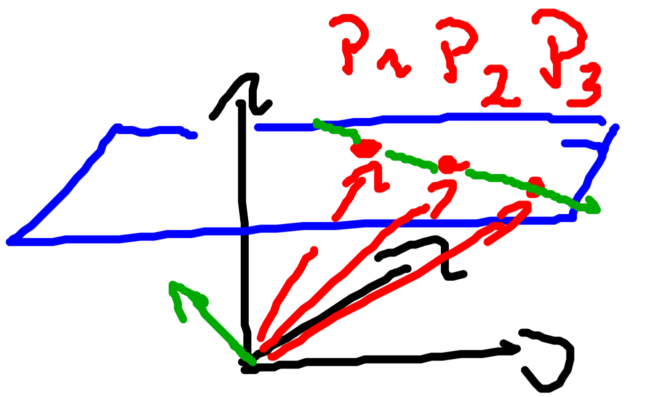
$$g = p \times q$$



Schnittpunkt von g und h

$$p = g \times h$$

Drei Punkte kollinear:



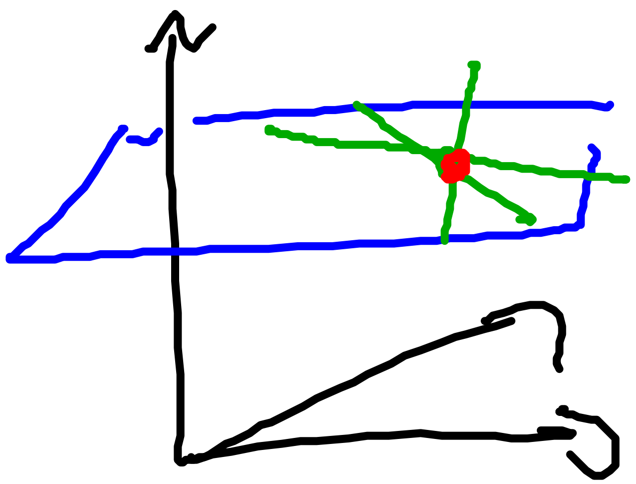
$\det(P_1\ P_2\ P_3) = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ nicht trivial lösbar

---

Zusammenhang Hessesche Normalform

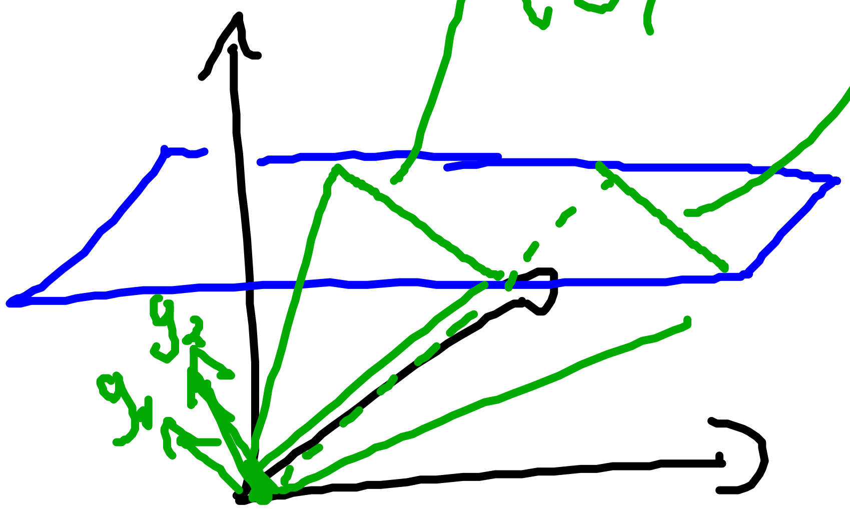
Gerade $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle + c = 0$



Drei Geraden gehen durch einen Punkt (oder sind parallel) wenn $\det(g_1\ g_2\ g_3) = 0$

Schnittpunkte paralleler Geraden

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c' \end{pmatrix}$$



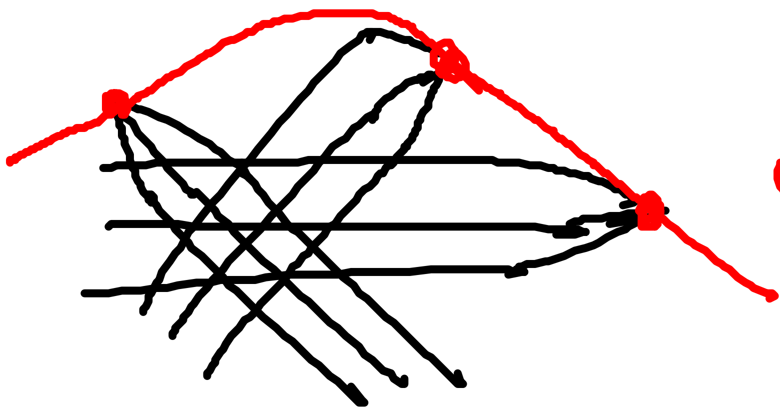
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc' - bc \\ -ac' + ac \\ ab - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

Punkt im Unendlichen

Verbindung zweier unendlich fernen Punkte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Unendlich ferne Gerade



Gerade im ∞

Eigenschaften der projektiven Ebene:

- Zwei verschiedene Geraden haben <u>immer</u> <u>einen</u> Schnittpkt
- Zwei verschiedene Punkte haben <u>immer</u> <u>eine</u> Verbindungsgerade

Verb. gerade

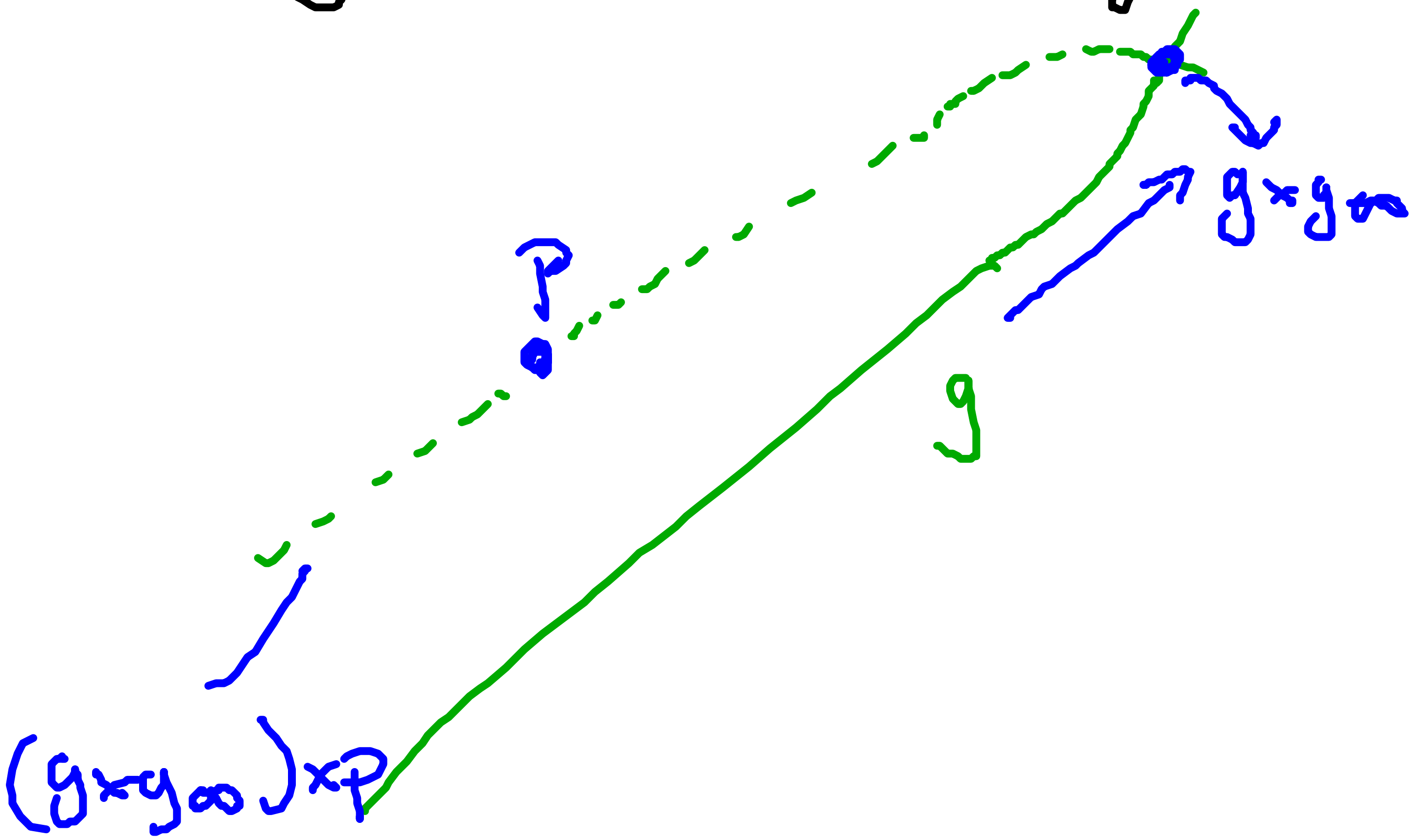
$P_1 \times P_2$	endl	fern
endl.		
fern		Ferngerade $= g_\infty$

Schnittpunkt:

$g_1 \times g_2$	
	endlichen Schnittpkt
	unendlichen Punkt in Richtung der Geraden
$\times g_\infty$	Fernpunkt in Richtung der Geraden

Konstruktion einer Parallelen:

Sei g_∞ die Ferngerade



$(g \times g_\infty) \times P$

$=$ Parallele.

Transformationen:

Seien p_1, P_2, P_3 Punkte in homogenen Koordinaten
Sei M eine invertierbare 3x3 Matrix

$$P_i' = M \cdot P_i$$

Satz: P_1, P_2, P_3 sind kollinear $\Leftrightarrow$
P_1', P_2', P_3' kollinear

Bew

$P_1 P_2 P_3$ kolli $\Leftrightarrow \det(P_1 \, P_2 \, P_3) = 0$

$\Leftrightarrow \det(M) \cdot \det(P_1 \, P_2 \, P_3) = 0$

$\Leftrightarrow \det(M p_1 \;\; M p_2 \;\; M p_3) = 0 \Leftrightarrow P_1' P_2' P_3'$ kollinear

Projektive Transformationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$$ Translation um $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$$ Drehung um Nullpunkt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 1 \end{pmatrix}$$ Skalierung

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 1 \end{pmatrix}$$ allgemein Affine Transform

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$ allgemein Projektive Abb.