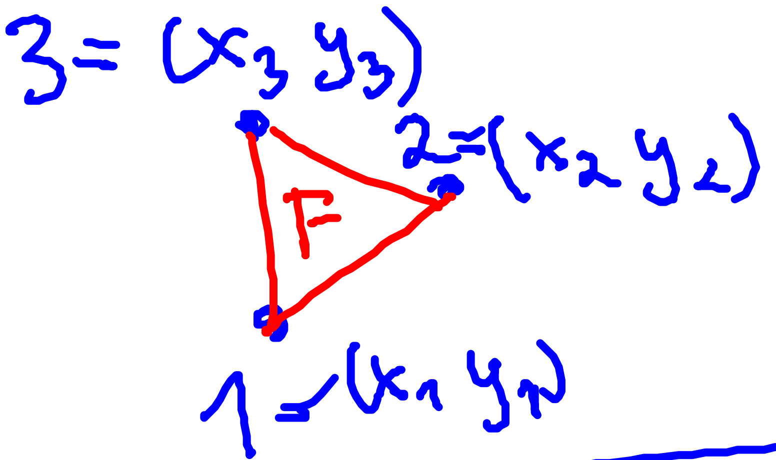
Das kann in der Semestrale drankommen:

- Skalarprodukt, im $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$
- standard skalarprodukt.
- Norm
- Orthogonalbasis, Orthonormalbasis
- Gram-Schmidt Verfahren
- affine Räume
- Hesse-NF
- Regression (Ausgleichsrechnung)
- Matrizengruppen
- Achsen-, Punktspiegelung
- Drehmatrizen (Achsen, Winkel)
- Eigenwerte, Eigenvektoren
- Charakteristische Polynom

- Nilpotente Matrix
- ähnliche Matrizen
  $A \sim B \Leftrightarrow \exists T \quad A = T^{-1} B T$
- Hauptachsentransfm
- Normalformen von Quadriken
- JNF
- Diffgleichungssystem
- Determinanten (Volumen, Vorzeichen)

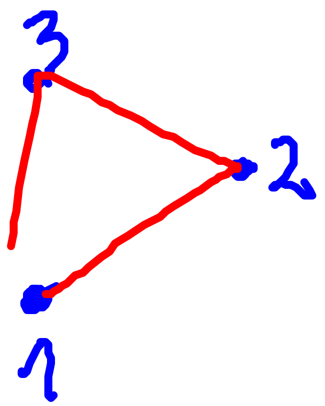
4.4 Determinanten und Vorzeichen.
$\Leftrightarrow$ Orientierung von Punktmengen.

Zur Erinnerung

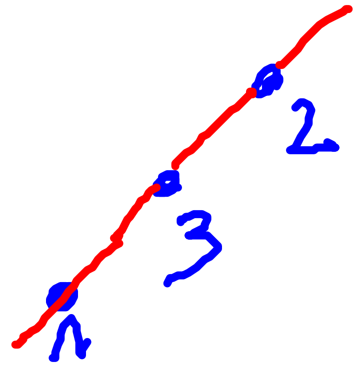


orientierte Fläche

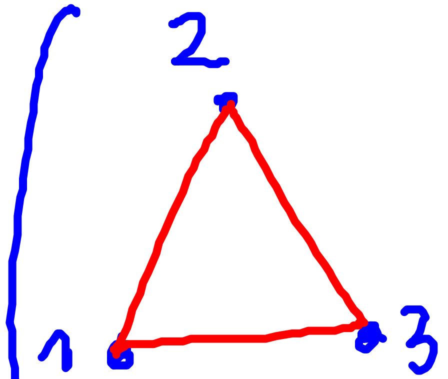
$$F = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$\operatorname{sign}(\det(\ldots)) = +1$



$\operatorname{sign}(\det(\ldots)) = 0$



$\operatorname{sign}(\det(\ldots)) = -1$

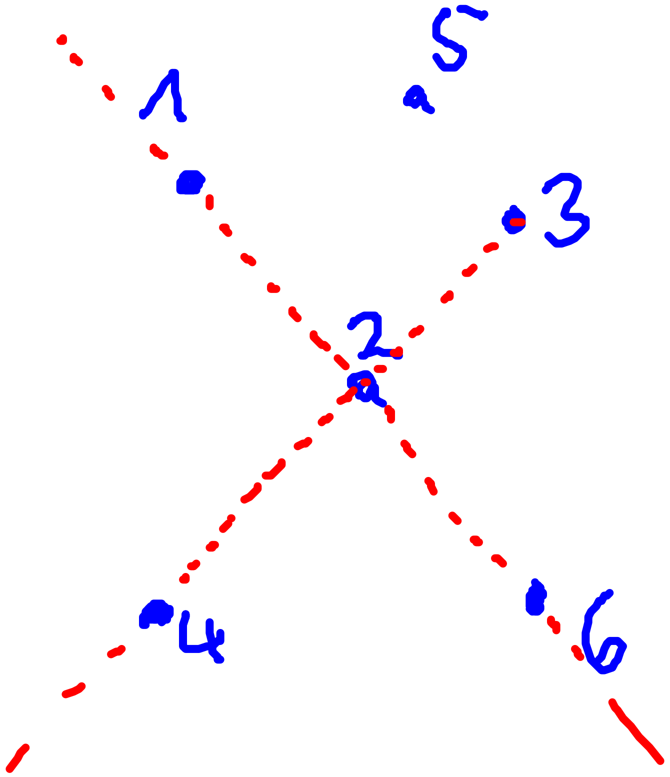
Vorzeichenliste einer Punktkonfiguration

gegen Punkte $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2$

Indexmenge $E = \{1, \dots, n\}$

Vorzeichenliste $\chi : E^3 \to \{+, 0, -\}$

$$\chi(i,j,k) = \operatorname{sign} \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ p_i & p_j & p_k \\ | & | & | \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Vorzeichenliste zur Konfiguration:

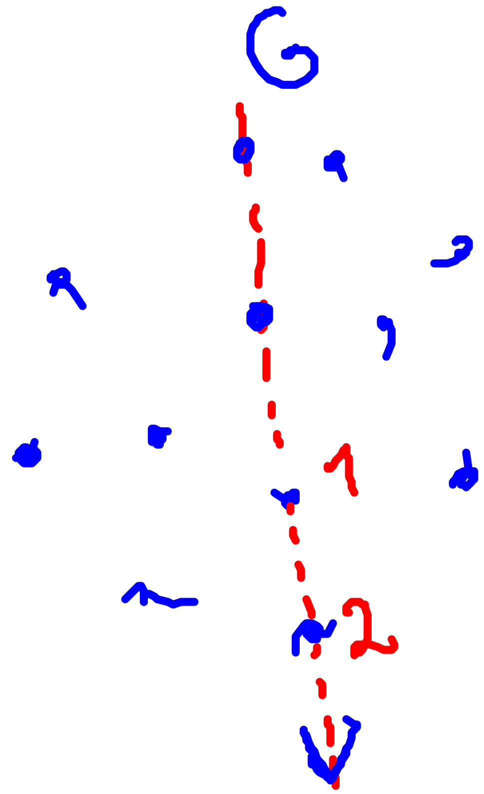
$\chi(123) = +$
$\chi(124) = -$
$\chi(125) = +$
$\chi(126) = 0$
$\chi(134) = -$
$\chi(135) = +$
$\chi(136) = -$

$\chi(145) = +$
$\chi(146) = +$
$\chi(156) = -$
$\chi(234) = 0$
$\chi(235) = +$
$\chi(236) = -$
$\chi(245) = -$

$\chi(246) = +$
$\chi(256) = -$
$\chi(345) = -$
$\chi(346) = +$
$\chi(356) = -$
$\chi(456) = -$

Liste der geordneten Tripel (i, j, k), $i<j<k$ reicht aus die Abb χ festzulegen

$$\chi(123) = \chi(231) = \chi(312) = -\chi(213) = -\chi(321) = -\chi(132)$$



Wie trennen Geraden die von Punkten aufgespannt werden

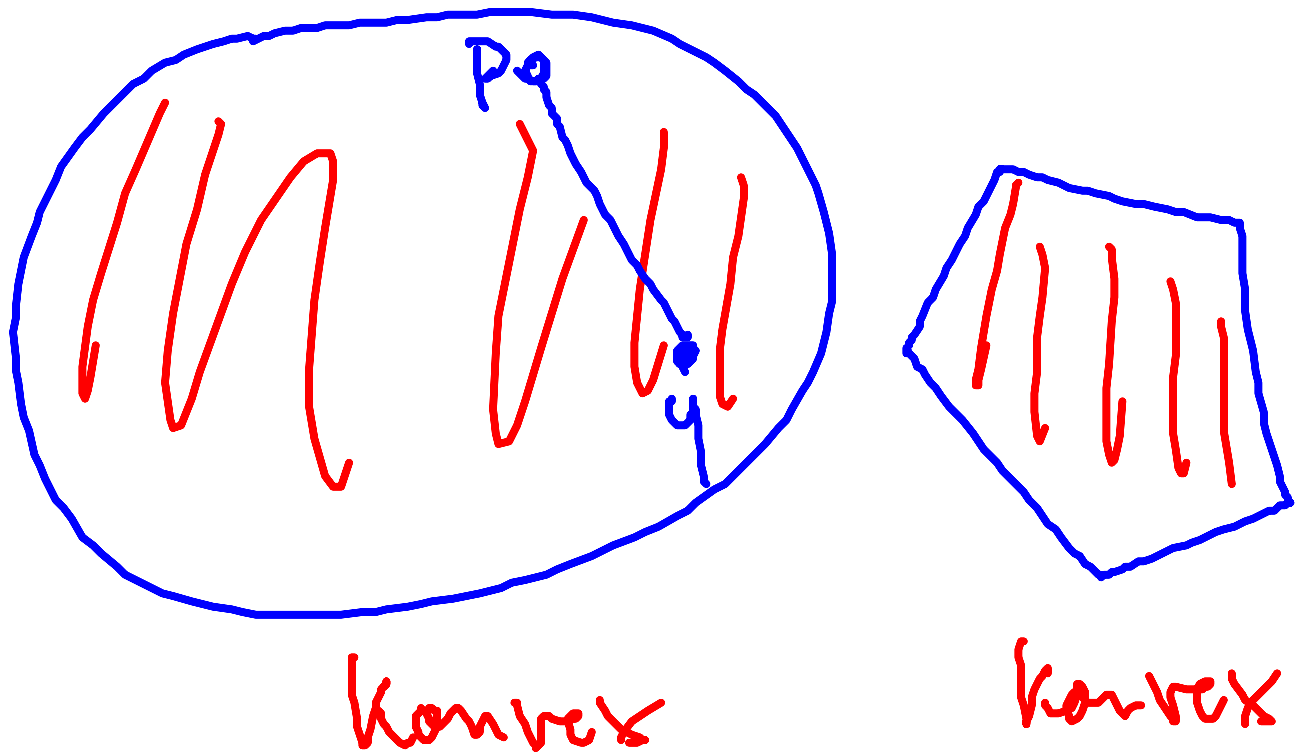
Alles auf $G = \{k \mid \chi(12k) = 0\}$

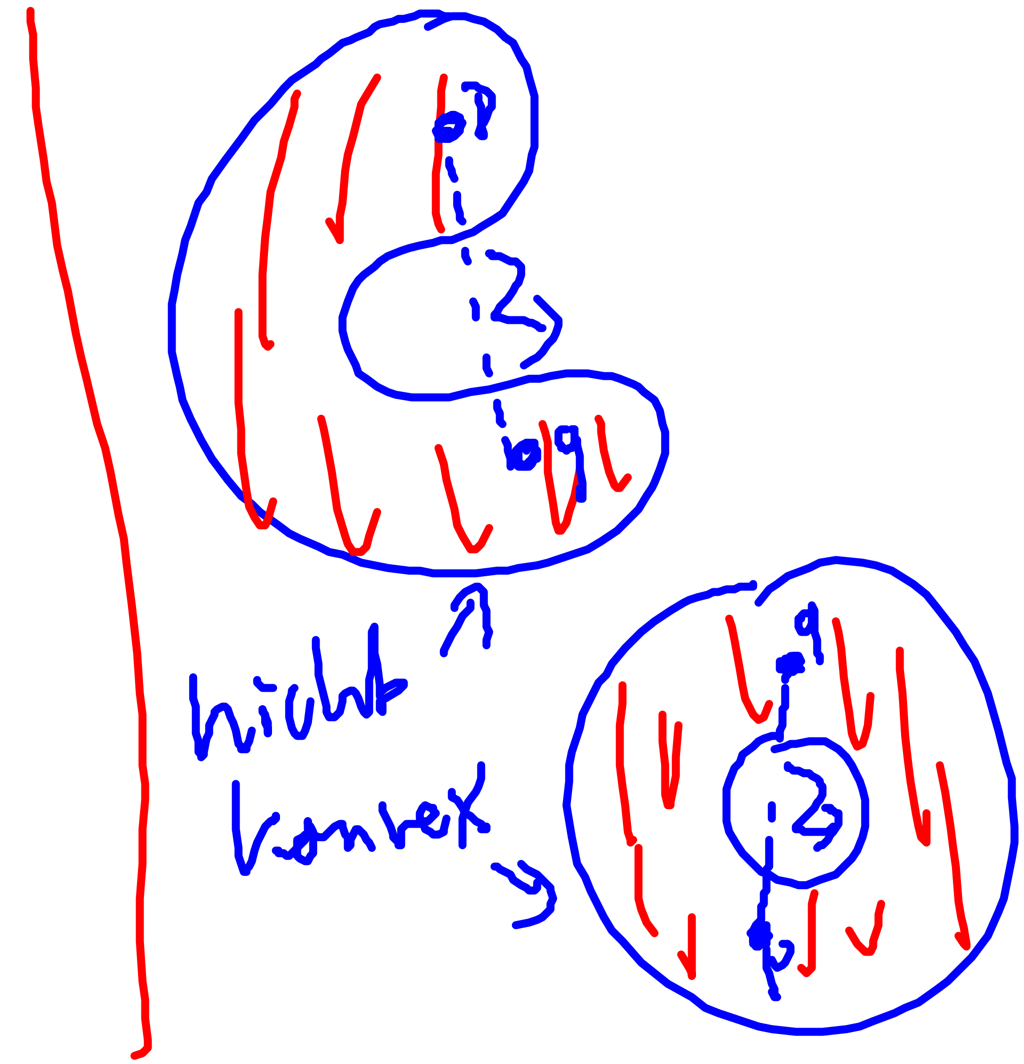
Alles links von $G = \{k \mid \chi(12k) = +\}$

Alles rechts von $G = \{k \mid \chi(12k) = -\}$

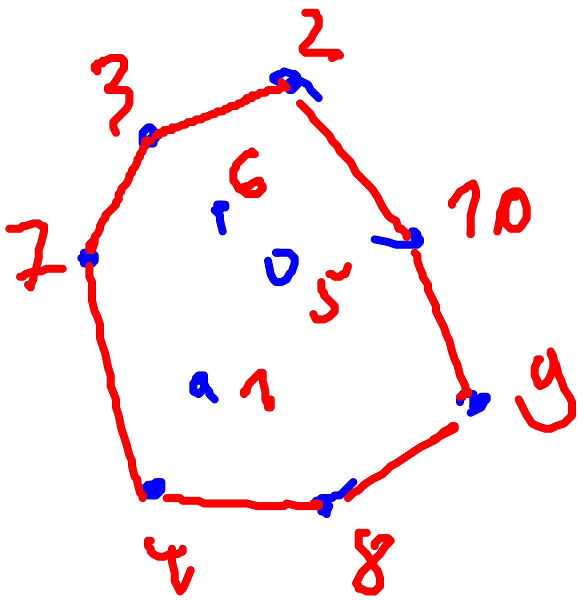
Konvexe Mengen: Eine Menge M im $\mathbb{R}^n$ heißt konvex wenn zu beliebigen $p, q \in M$ auch die Strecke $\overline{pq}$ in M liegt.

Keine Löcher und Dellen





Konvexe Hülle der Punkte $p_1 \ldots p_n$



Kleinste konvexe Menge die $p_1 \ldots p_n$ umfasst

In 2-D $\rightsquigarrow$ Gummiband um Punkte spannen

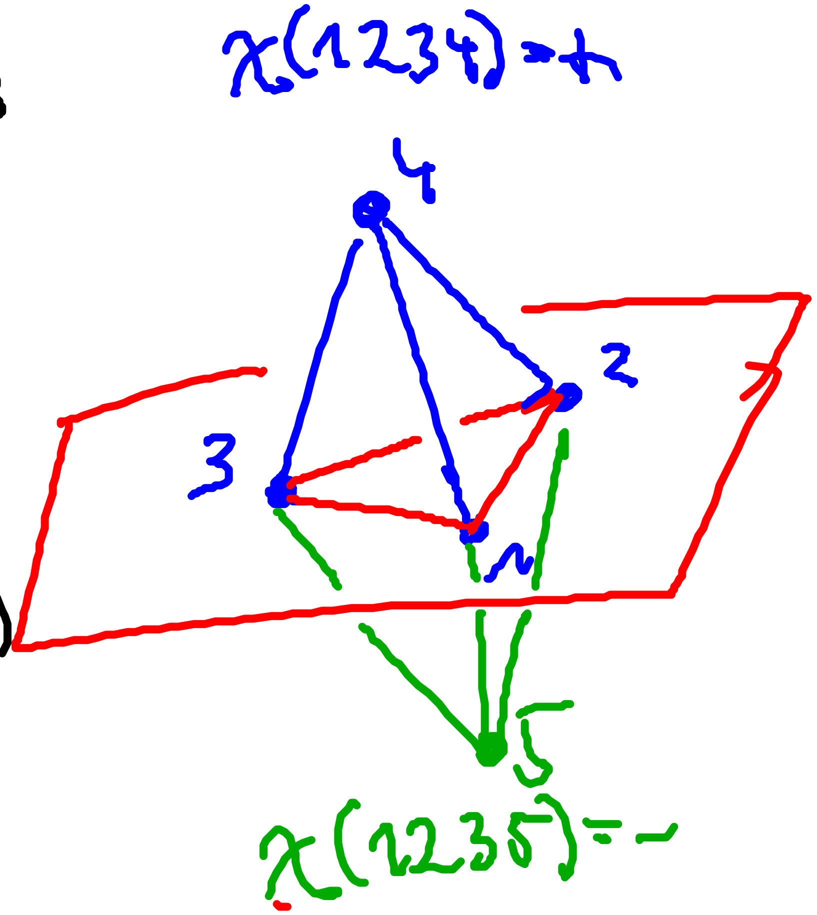
Rand = (2, 3, 7, 4, 8, 9, 10)

$i \neq j$ (i,j) liegt im Rand der konv Hülle (gegen Uhrz.)

wenn $\chi(i,j,k) \geq 0$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$

3-Dimensional

gegebene Punkte $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^3$



$$\chi : \{1, \ldots, n\}^4 \to \{+, 0, -\}$$

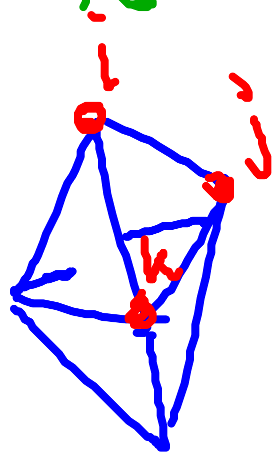
$$(i, j, k, l) \mapsto \operatorname{sign}\left(\det \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ P_i & P_j & P_k & P_l \\ | & | & | & | \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Konvexe Hülle:

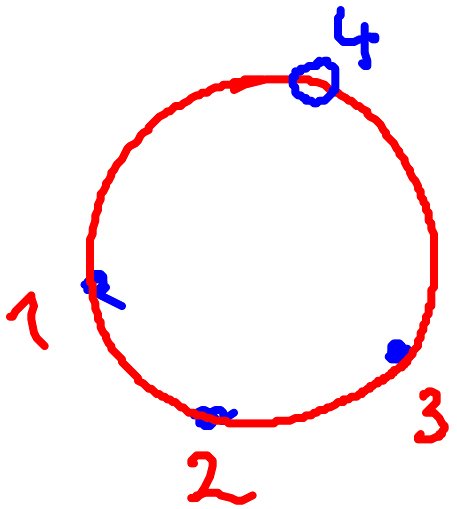
(i, j, k) im Rand der konvexen Hülle

$\chi(i, j, k, l) \geq 0$ für alle $l \in \{1, \ldots, n\}$

und $\chi(i, j, k, l) = +$ für mindestens ein l



In-Kreis, Auf-Kreis Tests.

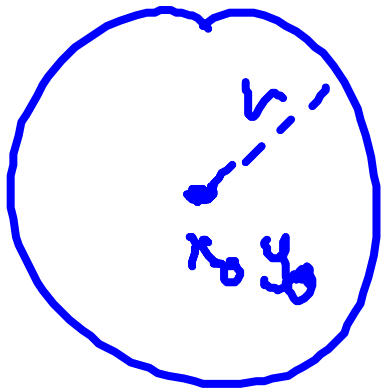


3 Punkte 1...3 spannen einen Kreis auf

Frage: Wann liegt Punkt 4 auf diesem Kreis

Test: $\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^2+y_1^2 & x_2^2+y_2^2 & x_3^2+y_3^2 & x_4^2+y_4^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

Kreisgleichung:



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Rightarrow$$

$$x^2-2\underline{xx_0}+\underline{x_0^2}+y^2-\underline{2yy_0}+\underline{y_0^2}-\underline{r^2}=0$$

$$x^2+y^2+\underline{a}x+\underline{b}y+\underline{c}=0 \Leftarrow K(a,b,c)$$

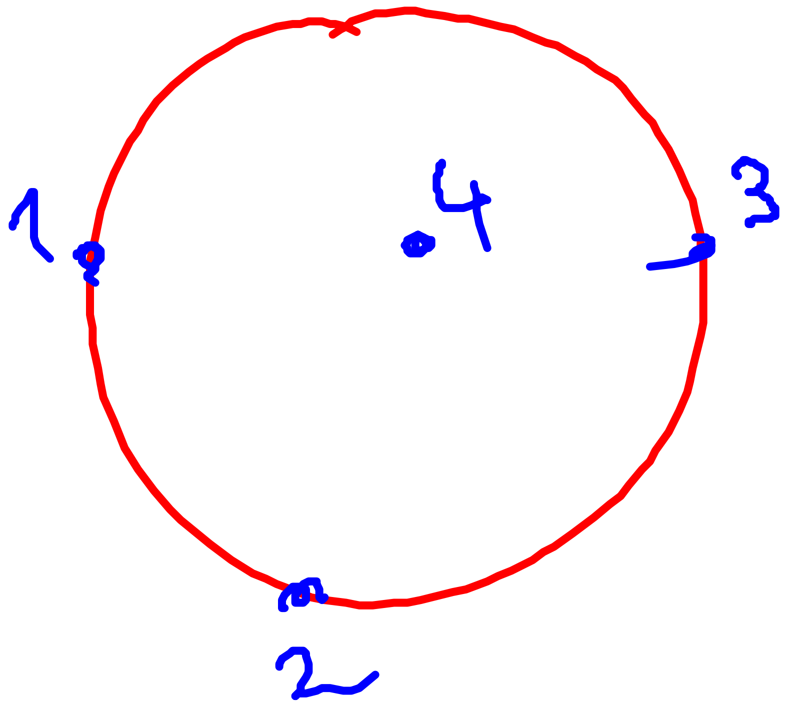
Punkt (x_i, y_i) liegt auf $K(a,b,c) \Leftrightarrow x_i^2+y_i^2+ax_i+by_i+c=0$

$$\begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht trivial lösbar

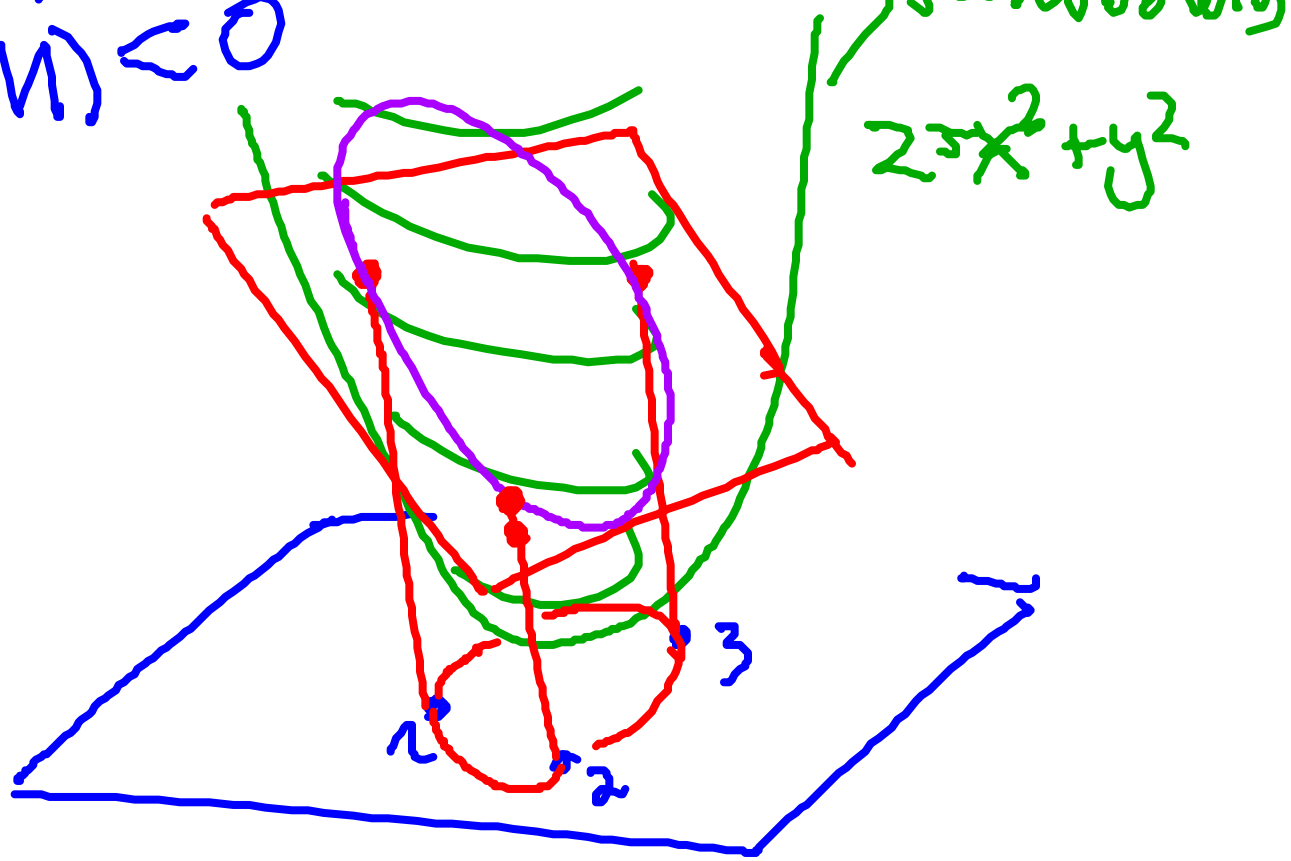
$\Rightarrow \det(M)=0$

$\Leftrightarrow$ 1…4 liegen auf Kreis

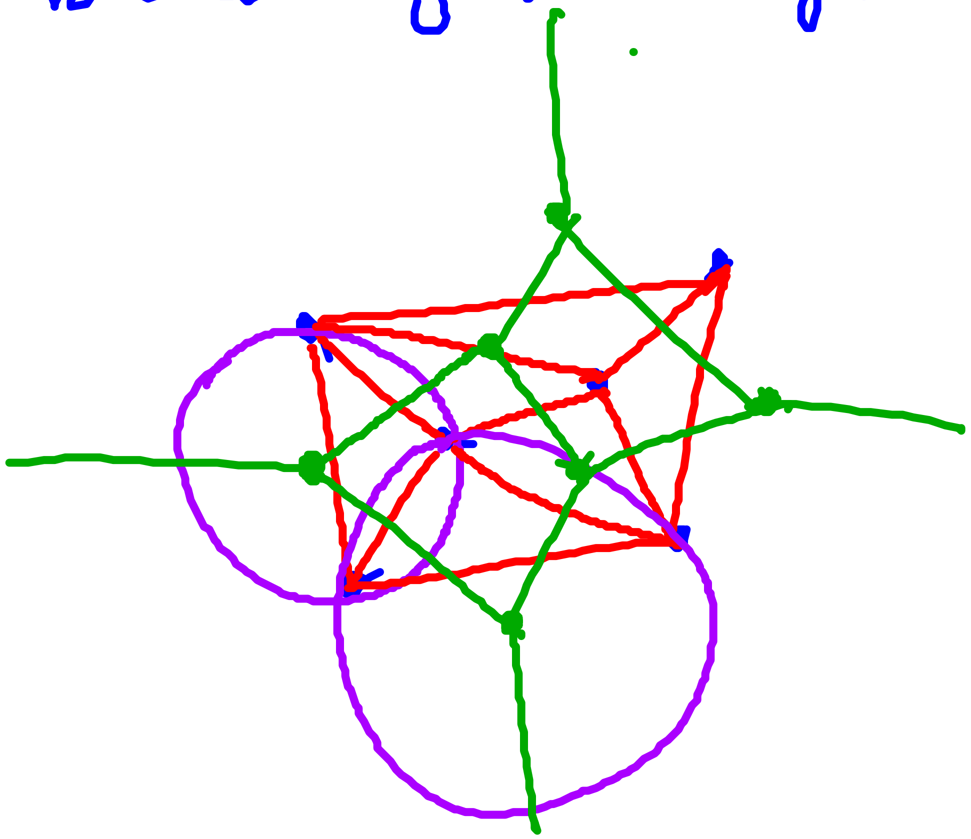


1 2 3 gegen Uhrzeigersinn

4 <u>inn</u> von 1 2 3 aufgsp. kreis
wenn
$\det(M) < 0$



Delaunay Triangulierung einer Punktmenge



Menge von Dreiecken (i, j, k) so dass im Umkreis von (i, j, k) kein weiterer Punkt liegt

$\Downarrow$

lässt sich Voronoi Zellen konstruieren.

$\mathrm{Vor}(p_i) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - p_i\| < \|x - p_j\| \text{ für alle } i \neq j \}$