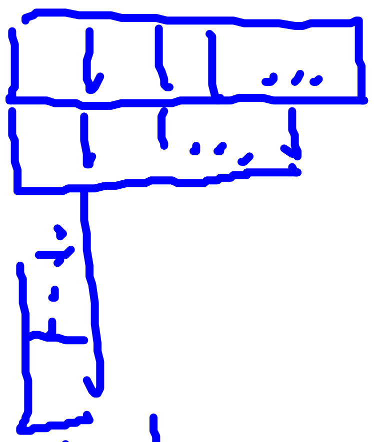
Wiederholung Kochrezept JNF

- Sei A eine $n \times n$ Matrix mit paarweise versch. EW $\lambda_1 \dots \lambda_k$ und zerfallendem $p_A(\lambda)$
- Bestimme $r_A(\lambda_i)$ für $i = 1 \dots k$
- Für jedes $\lambda = \lambda_i$: Berechne

$$\dim \ker(A - \lambda E) \leq \dim \ker\left((A-\lambda E)^2\right) \dots\dots \text{ solange bis Gleichheit}$$

d_1 d_2 .... Differenzen

Zeichne Treppe:



d_1 Kästchen

d_2 Kästchen

Partition best. anz 1sen in zu λ_i geh. Jordanblöcken

Partition $j_1 \, j_2 \dots$ von $r_A(\lambda_i) - g_A(\lambda_i)$

Wie bestimmt man die Basis der Transform. T

Bestimmung der Basis für den zu $\lambda = \lambda_i$ gehörigen Hauptraum $\text{Haupt}_A(\lambda)$

Bestimme für jedes Jordankästchen eine maximale Vektorkette so daß unter $A - \lambda E$

$$v_1 \xrightarrow{A-\lambda E} v_2 \xrightarrow{A-\lambda E} v_3 \;\cdots\cdots \to v_s \to 0$$

Startvektor $\in \text{Kern}\left((A-\lambda E)^s\right) - \text{Kern}\left((A-\lambda E)^{s-1}\right)$

Eigenvektor zu λ von Matrix A

<u>Bsp</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-3+\lambda)^2 \cdot \lambda^2 = P_A$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \boxed{\lambda_2 = 0}$$

$$r_A(\lambda_1) = 2 \qquad r_A(\lambda_2) = 2$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kern} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-3E)^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 & -4 \\ -6 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kern} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-3E} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0$$

$$A - 0E = A$$

$$\text{Kern} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-0E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kern} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-0E} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to 0$$

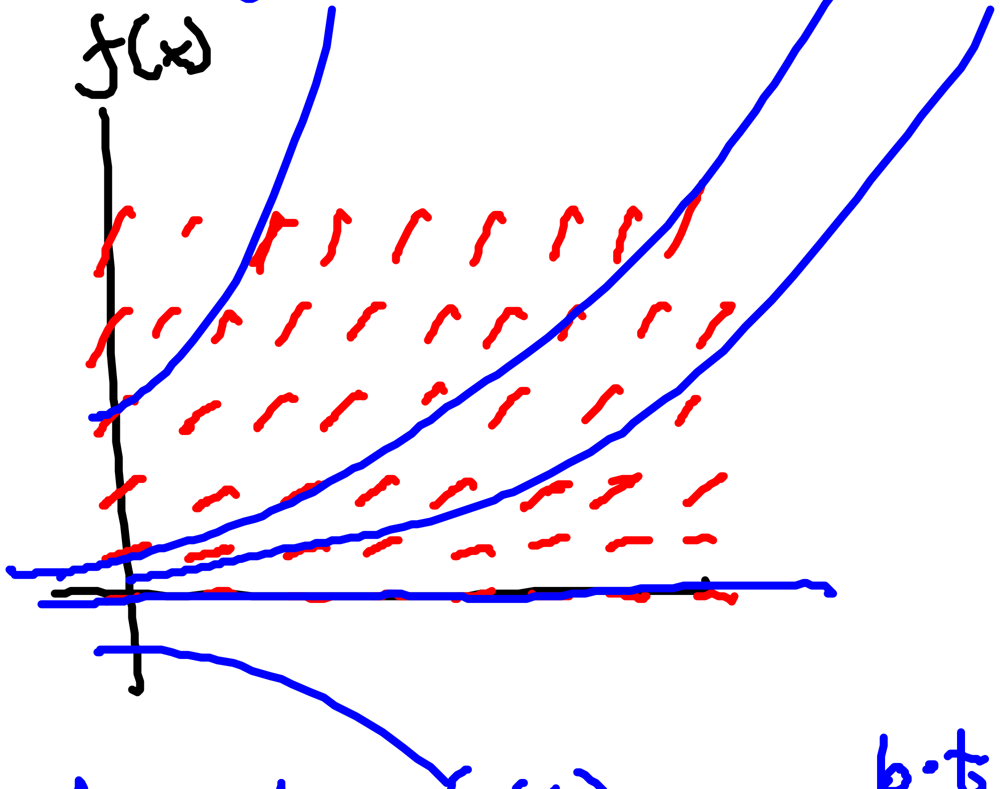
$$T = \begin{array}{cccc} A-3E & & A-0E & \\ \end{array}$$
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

3.9 Lineare Differentialgleichungen und LA

Einfachste Diffgl:

gesucht: $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = k \cdot f(x)$



Anstieg ist proportional zum Vorhandenen:

- Geld auf der Bank
- Radioaktiver Zerfall
- Bakterienwachstum

Ansatz: $f(t) = c \cdot e^{b \cdot t}$

$f'(t) = c \cdot b \cdot e^{bt}$ $\Big\}$ $b = k$

$$\boxed{\text{Lösung: } f(t) = c \cdot e^{kt}}$$

Mehrere Funktionen ⇝ Differentialgleichungssysteme

Beispiel: Löwen $L(t)$, Mäuse $M(t)$

$$\begin{aligned} L'(t) &= k_1 L(t) - kill_1 M(t) \\ M'(t) &= k_2 M(t) - kill_2 L(t) \end{aligned}$$

lineares Diffglgsystem

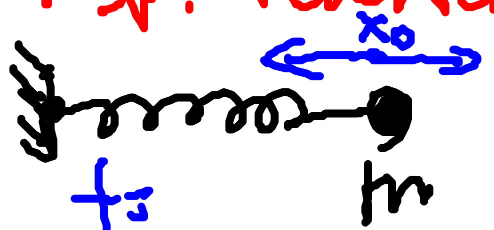
$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t))$$

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f_n'(t))$$

$$\boxed{f'(t) = A f(t)}$$

homogenes lineares DGLS mit konst. Koeff.

Bsp: Federpendel



f: Federkraft

$F = -f x$

$v = x'$

$a = v'$

$m \cdot a = F$

$$\begin{pmatrix} x' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{f}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

Beispiele:

Löwen/Mäuse

$$A = \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 l_1 \\ -k_1 l_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

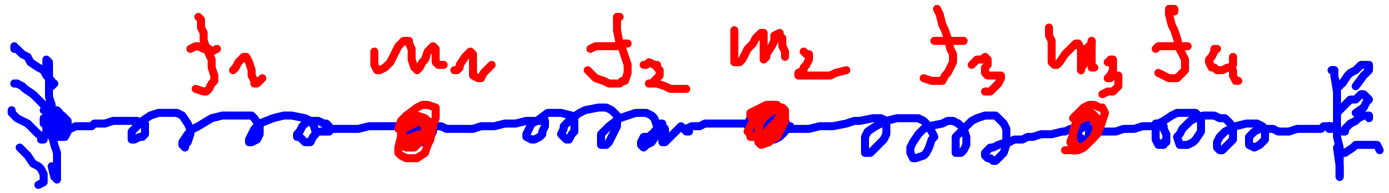
Federpendel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{f}{m} & 0 \end{pmatrix}$$

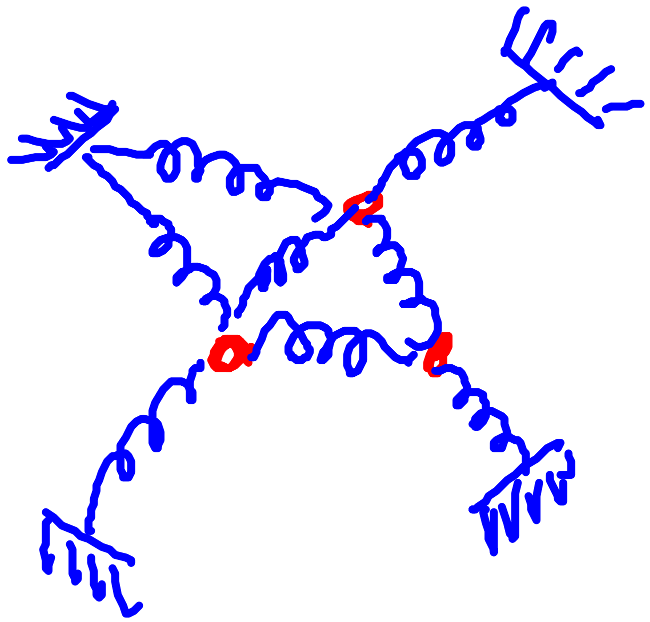
Gedämpfte Schw.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{f}{m} & v \end{pmatrix}$$

Systeme von Federn



$\to$ Lineare DGLS höherer Dimension



Lösungsmenge des homogenen DGLS $f'(t) = A \cdot f(t)$

Es sei $\mathcal{L}_A = \{ \varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \varphi'(t) = A \cdot \varphi(t) \}$

- Sei $\varphi \in \mathcal{L}_A$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \varphi \in \mathcal{L}_A$
- Sei $\varphi, \varphi' \in \mathcal{L}_A \Rightarrow \varphi + \varphi' \in \mathcal{L}_A$

$\Rightarrow$ $\mathcal{L}_A$ ist Vektorraum. (man kann zeigen dass $\dim(\mathcal{L}_A) = n$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

$\longrightarrow$ gesucht: Basis von $\mathcal{L}_A$

Wichtiger Sonderfall: A ist diagonalisierbar

$A = T D T^{-1}$ sei $v_1 \dots v_n$ Basis aus EV

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ die zugeh. EW

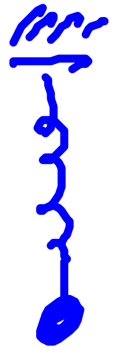
Basis von $\mathcal{L}_A$: $\varphi_i(t) = v_i \cdot e^{\lambda_i t}$

$$\varphi_i'(t) = \left(v_i \cdot e^{\lambda_i t}\right)' = \underline{\lambda_i v_i} e^{\lambda_i t} = A v_i e^{\lambda_i t} = A \cdot \varphi_i(t)$$

Basis: $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$

Allgemeine Lösung: $\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t)$

Beispiel: $\begin{pmatrix} x' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$



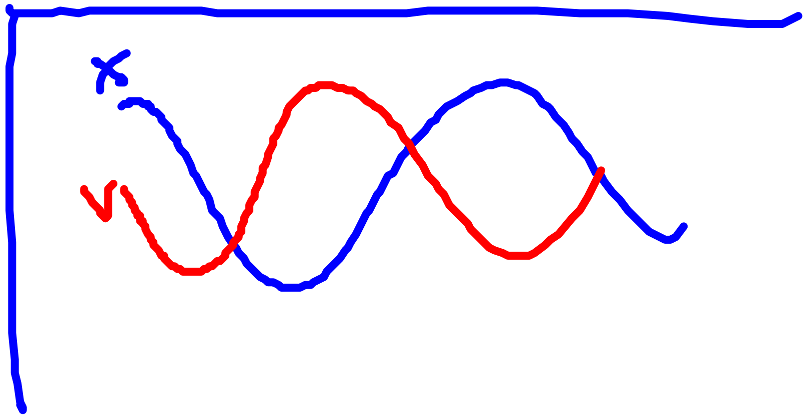
$\underline{p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1}$ $\quad \lambda_{1/2} = \pm i \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung $\alpha_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \alpha_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Wie kommt man zu reellen Lösung? In diesem Fall: $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$

$$\underbrace{(a+ib)\underbrace{e^{it}}_{\cos(t)+i\sin(t)}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{(a-ib)\underbrace{e^{-it}}_{\cos(t)-i\sin(t)}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = 2\begin{pmatrix} a\cos(t) - b\sin(t) \\ -b\cos(t) - a\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$x + \bar{x} = 2\,\mathrm{Re}(x)$$



Kompaktere Darstellung:

Aufgabe $f'(t) = A \cdot f(t) \quad f(0) = x_0$

Lösung $f(t) = e^{At} \cdot x_0$

Bew (A diagonalisierbar) $A = \overset{\text{EV}}{T} \cdot \overset{\text{Diagmatrix}}{D} \cdot T^{-1}$

- $e^{At} \cdot x_0 = e^{TDT^{-1}t} \cdot x_0 = \underbrace{T e^{Dt}}_{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & v_n e^{\lambda_n t} \\ | & & | \end{pmatrix}} \underbrace{T^{-1} \cdot x_0}_{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}} = \sum \alpha_i v_i e^{\lambda_i t}$

- $e^{A \cdot 0} \cdot x_0 = E x_0 = x_0$

Funktioniert auch allgemein