$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$k \times k$ Matrix

- Zu jedem EW gehört eine obere ∇-Matrix
- Jedes Jordankästchen liefert einen (unabhängigen) EV

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^5 (3-\lambda)^4$$

$$\begin{pmatrix}
2 & 1 & & & & & & & \\
 & 2 & 1 & & & & & & 0 \\
 & & 2 & & & & & & \\
 & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & 2 & & & & \\
 & & & & & 3 & 1 & & \\
 & & & & & & 3 & & \\
 0 & & & & & & & 3 & \\
 & & & & & & & & 3
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
J(2,3) & & & & \\
 & J(2,2) & & & \\
 & & J(3,2) & & \\
 & & & J(3,1) & \\
 & & & & J(3,1)
\end{pmatrix}$$

- Anz der Jordanblöcke pro EW $=$ geometrische Vielfachheit

Def: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise versch. EW einer Matrix A $\left(p_A(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{r_A(\lambda_1)} \cdot \dots \cdot (\lambda_k-\lambda)^{r_A(\lambda_k)}\right)$

So heißt $\mathrm{Haupt}_A(\lambda_i) := \mathrm{Kern}\left((A-\lambda_i E)^{r_A(\lambda_i)}\right)$ der Hauptraum zu λ_i

Satz: $\dim(\mathrm{Haupt}_A(\lambda_i)) = r_A(\lambda_i)$

Bew Sei

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \\ \hline \end{array} & & \\ & \begin{array}{|ccc|}\hline \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \\ \hline \end{array} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = J$$

Wegen $\dim(\mathrm{Kern}(X)) = \dim(\mathrm{Kern}(T^{-1}XT))$ für alle X genügt es $\dim(\mathrm{Haupt}_J(\lambda_i))$ zu Best. oBdA $i=1$

$$J-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \\ \hline \end{array} & & \\ & \begin{array}{|ccc|}\hline \bullet & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \bullet \\ \hline \end{array} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \qquad (J-\lambda_1 E)^{r_A(\lambda_i)} = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline \end{array} & 0 \\ 0 & \begin{array}{|ccc|}\hline \bullet & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ \hline \end{array} \\ & & \ddots \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Haupt}_J(\lambda_i) = \mathrm{span}(e_1, \dots, e_{r_J(\lambda_i)})$$

$\bullet \neq 0$

Bem • $K^n = \mathrm{Haupt}_A(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Haupt}_A(\lambda_k)$

• Sei $v \in \mathrm{Haupt}_A(\lambda_i) \Rightarrow A\cdot v \in \mathrm{Haupt}_A(\lambda_i)$

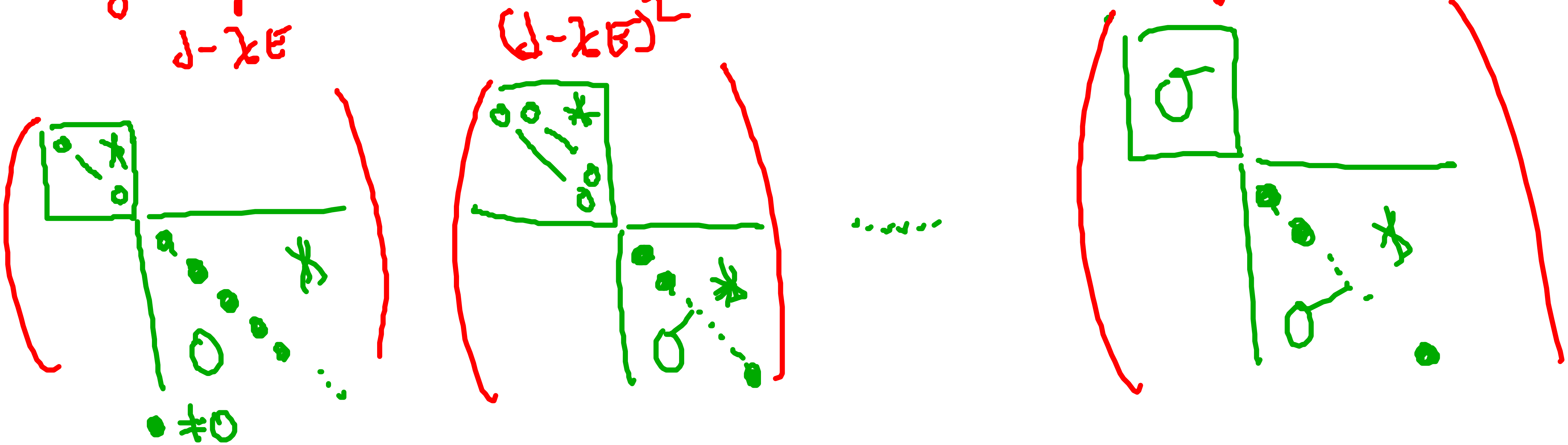
Aus A ähnlich zu $B \Rightarrow A^m$ ähnlich zu B^m

Aus A ähnlich zu $B \Rightarrow A-\lambda E$ ähnlich zu $B-\lambda E$

Sei A Matrix mit EW λ. J sei JNF von A

$$\underbrace{\ker(A-\lambda E)}_{=\,\mathrm{Eig}_A(\lambda)} \subseteq \ker((A-\lambda E)^2) \subseteq \dots \subseteq \underbrace{\ker((A-\lambda E)^{r_A(\lambda)})}_{=\,\mathrm{Haupt}_A(\lambda)} = \dots$$

Es genügt die Relation für JNF zu zeigen:



Beispiel $\quad P_J(\lambda) = (2-\lambda)^4 \cdot (3-\lambda)^2$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$(J-2E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}; \quad (J-2E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & 2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}; \quad (J-2E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & 4 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ker $= \operatorname{span}(e_1, e_4) \subseteq$ Kern $= \operatorname{span}(e_1, e_2, e_4) \subseteq$ Kern $= \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3, e_4)$

Abb unter $J-2E$

$e_4 \to 0$

$e_3 \to e_2 \to e_1 \to 0$

Jordankästchen

Bsp λ einziger Eigenwert $\quad r_J(\lambda)=7 \quad g_J(\lambda)=2$

$$(J-\lambda E) \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right) \qquad (J-\lambda E)^2 \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$$(J-\lambda E)^3 \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right) \qquad (J-\lambda E)^4 \quad \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{Rang}=5 \xrightarrow{-2} \text{Rang}=3 \xrightarrow{-2} \text{Rang}=1 \xrightarrow{-1} \text{Rang}=0$$

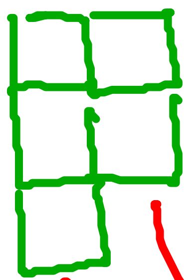
2 Blöcke aktiv $\quad$ 2 Blöcke aktiv $\quad$ 1 Block aktiv

Vektorketten

$e_4 \to e_3 \to e_2 \to e_1 \to 0$

$e_7 \to e_6 \to e_5 \to 0$

Treppentrick:



$\leftarrow \text{Rang}(J-\lambda E) - \text{Rang}((J-\lambda E)^2)$

$\leftarrow \text{Rang}((J-\lambda E)^2) - \text{Rang}((J-\lambda E)^3)$

$\leftarrow \text{Rang}((J-\lambda E)^3) - \text{Rang}((J-\lambda E)^4)$

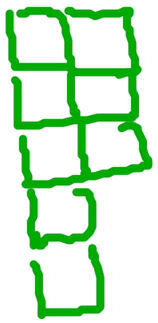
1sen im 1. Jordanblock

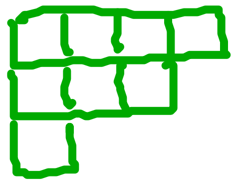
1sen im zweiten Jordanblock

Def Partition: Sei $k \in \mathbb{N}$ und
$k = p_1 + p_2 + \dots + p_m$ mit $p_i \in \mathbb{N}$ und
$p_1 \geq p_2 \geq p_3 \dots \geq p_m$

$(p_1, p_2 \dots p_m)$ heißt Partition von k.

Bsp: $k=8$ $(2,2,2,1,1)$ $(4,3,1)$





Mögliche Jordan(teil)matrizen zu Hauptraum von EW λ
Gesamtgröße $r(\lambda)$. Anz Jordan Blöcke $g(\lambda)$; Anz 1sen $r(\lambda)-g(\lambda)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \boxed{J_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{J_{g(\lambda)}} \end{pmatrix}$$

Für jede mögliche Partition von $r(\lambda)-g(\lambda)$ gibt es (bis auf Ähnlichkeit) genau eine Jordanmatrix

Bsp $r(\lambda)=13$ $\quad g(\lambda)=5$ $\quad r(\lambda)-g(\lambda)=8$

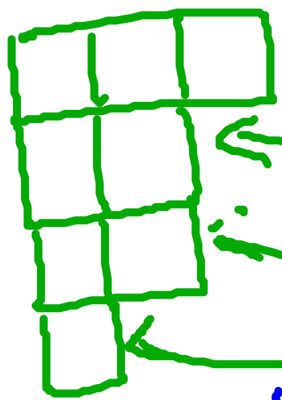
JNF zur Partition $(4,3,1)$

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} & & & & \\
& \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} & & & \\
& & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} & & \\
& & & \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix} & \\
& & & & \begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ 5 Jordankästchen

i	1	2	3	4	5
$\operatorname{rang}((J-\lambda E)^i)$	8	5	3	1	0

$-3 \quad -2 \quad -2 \quad -1$



4 $\quad$ 3 $\quad$ 1

Kochrezept für JNF

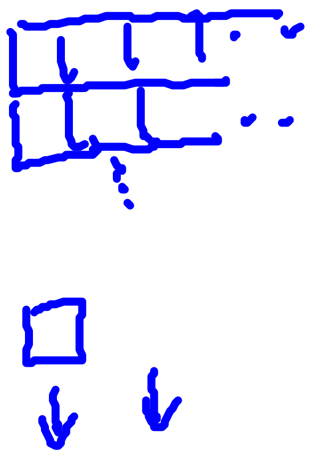
- Sei A $n \times n$ Matrix mit paarweise versch. EW $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ und zerfallendem $p_A(\lambda)$
- bestimme $r_A(\lambda_i)$ (aus p_A ablesen)
- Für jedes $\lambda = \lambda_i$: Berechne

$$\underbrace{\dim(\ker(A-\lambda E))}_{= \, l_{\lambda,1}} \leq \underbrace{\dim(\ker((A-\lambda E)^2))}_{l_{\lambda,2}} \leq \ldots\ldots \leq l_{\lambda,m_\lambda}$$

solange bis erstmalig Gleichheit

$$l_{\lambda,1} \xrightarrow{d_1} l_{\lambda,2} \xrightarrow{d_2} \ldots \ldots$$

- Zeichne Treppe



$\leftarrow d_1$

$\leftarrow d_2$

Partition $d_1 \; d_2 \ldots\ldots$

- Bestimme aus Partition die Jordanblöcke