Nachtrag: A sei $n \times n$ Matrix mit zerfallendem $p_A(\lambda)$
$\lambda_1 \dots \lambda_k$ seien die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\Rightarrow Eig_A(\lambda_1) \oplus \dots \oplus Eig_A(\lambda_k)$ ist direkte Summe.

Bew Sei $B_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i m_i})$ eine Basis von $Eig_A(\lambda_i)$
Zu zeigen $B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_k$ ist linear unabh.

Sei $$0 = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\boxed{\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} v_{ij}}}_{v_i \; \in Eig_A(\lambda_i)}$$ eine Nichttriviale Linkomb.

$\Rightarrow$ Mindestens zwei diesen Summen sind $\neq 0$

$\Rightarrow$ Es ex $v_i \in Eig_A(\lambda_i)$ $i = 1 \dots k$ $\sum v_i = 0$ aber nicht alle $v_i = 0$

$\Rightarrow$ $\lightning$ denn Eigenvektoren zu versch EW sind linear unabhängig

3.7. Normalformen einer O(n) Matrix.

<u>Ziel Satz:</u> Sei $A \in O(n)$ dann ex orthogonale Matrix T mit:

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \boxed{} & & & 0 \\ & \boxed{} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{} \end{pmatrix}$$

Wobei die Blöcke entweder (1), (-1)

oder $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

<u>Bew</u> Induktion über n.

<u>$n=1$</u> klar weil die einzigen $O(n)$ Matrizen (1) und (-1) sind.

Fortsetzung folgt...

Lemma 1 Sei $A \in O(n)$ und $v = a + ib$ mit $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ (i) $\bar{v} = a - ib$ ist EV zum EW $\bar{\lambda}$

(ii) $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$

Bew.: (i) $Av = \lambda v \Rightarrow \overline{Av} = \overline{\lambda v} \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$

(ii) $\langle v, \bar{v} \rangle = \langle Av, A\bar{v} \rangle = \langle \lambda v, \bar{\lambda}\bar{v} \rangle = \underbrace{\lambda^2}_{\neq 1} \langle v, \bar{v} \rangle$

$\Rightarrow \langle v, \bar{v} \rangle = 0$

Lemma 2 Sei $v = (a + ib) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\bar{v} = (a - ib)\frac{1}{\sqrt{2}}$ mit $\langle v, \bar{v} \rangle = 0$, $\|v\| = \|\bar{v}\| = 1$, $a, b \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \|a\| = \|b\| = 1 \quad a \perp b$

Bew.: $v + \bar{v} = \frac{2}{\sqrt{2}} a = \sqrt{2}\, a$; $v - \bar{v} = i\sqrt{2}\, b$

$\langle a, a \rangle = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \bar{v}), \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \bar{v}) \rangle = \frac{1}{2}(\underbrace{\|v\|^2}_{=1} + \underbrace{\|\bar{v}\|^2}_{=1} + 2\underbrace{\langle v, v \rangle}_{=0}) = 1$

$\langle b, b \rangle = \ldots\ldots = 1$

$\langle a, b \rangle = \ldots\ldots = 0$

Fortsetzung Beweis Satz $n=1$ klar.

Sei $n \geq 2$ und λ Eigenwert von A

Fall 1 $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ $\quad$ v ist zugehörige Eigenwert mit $\|v\|=1$

Sei $(v, w_1, \ldots\ldots, w_{n-1})$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$, $T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v & w_1 & \ldots & w_{n-1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

rekursiv mit B weiter

Fall 2 $\lambda \notin \mathbb{R} \Rightarrow \bar{\lambda}$ ist auch EW von A, Sei $\lambda = e^{i\alpha}$

Sei $Av = \lambda v$, $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ mit $\|v\| = \|\bar{v}\| = 1$ $\quad$ $\bar{\lambda} = e^{-i\alpha}$

$\overset{\text{Lema 1}}{\Longrightarrow} \langle v, \bar{v} \rangle = 0$

Sei $v, \bar{v}, w_1, \ldots\ldots, w_{n-2}$ eine ONB von $\mathbb{R}^n$

Lemma 2 $\Longrightarrow$ $a, b, w_1 \ldots w_{n-2}$ ONB von $\mathbb{R}^n$ mit

$v = (a+ib)\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a, b \in \mathbb{R}$

Sei $T = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ a & -b & w_1 & \ldots & w_{n-2} \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$

Beh: $T^{-1}AT = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{R_\alpha} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ mit $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$T^{-1}ATe_1 = T^{-1}Aa = T^{-1}A(v+\bar{v})\frac{1}{\sqrt{2}} = T^{-1}\left(\lambda v \frac{1}{\sqrt{2}} + \bar{\lambda}\bar{v}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= T^{-1}\left(\frac{1}{2}(a+ib)\cdot\lambda + \frac{1}{2}(a-ib)\bar{\lambda}\right) = e_1 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\bar{\lambda}\right)}_{\cos\alpha} - e_2 \underbrace{\left(\frac{1}{2i}\lambda - \frac{1}{2i}\bar{\lambda}\right)}_{-\sin(\alpha)}$$

Analog $T^{-1}ATe_2 = \ldots = -e_1 \sin(\alpha) + e_2 \cos(\alpha)$

Rest per Induktion

In Prosa:

Jede $O(n)$ Matrix hat bzgl. geeigneten Basis die Form

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}^{k\text{-mal}} & & & 0 \\ & \overbrace{\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}}^{l\text{-mal}} & & \\ & & \overbrace{\begin{matrix}\boxed{R_{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{R_{\alpha_m}}\end{matrix}}^{m\text{-mal}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit

$k + l + 2m = n$

3.8. Trigonalisierung und Jordan Normalform

Frage: Was passiert wenn $p_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt, A aber trotzdem nicht diagonalisierbar ist

Trigonalisierung: Auf Dreiecksform Bringen

Satz von Schur: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ so daß $p_A(\lambda)$ über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Dann ex Matrix T so daß

$$T^{-1}AT = R \text{ mit } R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Obere Dreieckmatrix

Bew $\Rightarrow$ ZÜ

Bem. (i) Auf der Hauptdiagonalen von R stehen die EW von A entsprechend ihren Vielfachheiten

(ii) Über $\mathbb{R}$ kann $T \in SO(n)$ gewählt werden

(iii) Über $\mathbb{C}$ " $T \in SU(n)$ " "

(iv) $R = D + N$ mit Diagonalmatrix D alle Diagonalelemente von R auf Diagonale

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

$\Rightarrow N$ ist Nilpotent

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ & \ddots & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad N^n = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Frage: D steht fest, aber kann man N durch geschickte Wahl von T noch vereinfachen

Antwort: Man kann $\rightarrow$ Jordan Normalform

Def Jordanmatrix:

Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} =: J(\lambda, k)$ ← größe der Matrix

heißt Jordanmatrix (Jordankästchen, Jordanblock)

Bem: Für jedes $J(\lambda, k)$ ist λ ein k-facher Eigenwert. Ferner ist die geometrische Vielfachheit zum EW λ gleich $g_{J(\lambda,k)}(\lambda) = 1$. Denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist einziger EV.

<u>Satz</u> über Jordan Normalform:

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit $p_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren. Dann ex. invertierbare Matrix T mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

Wobei jedes J_i eine Jordanmatrix ist. Die Darstellung ist bis auf Reihenfolge der Blöcke eindeutig.

Bew → siehe Fischer

Nun: · Konsequenzen aus der JNF
· Wie berechnet man eine JNF
· Wie bestimmt man T.

Im Folgenden sei die JNF immer so sortiert, dass Blöcke zum gleichen EW hintereinander kommen.

Bsp $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^5 (3-\lambda)^4$

$$\begin{pmatrix}
2 & 1 & & & & & & & \\
 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & 2 & & & & & & \\
 & & & 2 & 1 & & & & \\
 & & & & 2 & & & & \\
 & & & & & 3 & 1 & & \\
 & & & & & & 3 & & \\
 & & & & & & & 3 & \\
 & & & & & & & & 3
\end{pmatrix}$$