$$(v-t)^T A (v-t) = c \iff v^T A v + \langle v, \ell \rangle = c'$$

$$\ell \in \text{Bild}(A) \Leftarrow \boxed{\ell = -2At}$$

$$c' = c - t^T A t$$

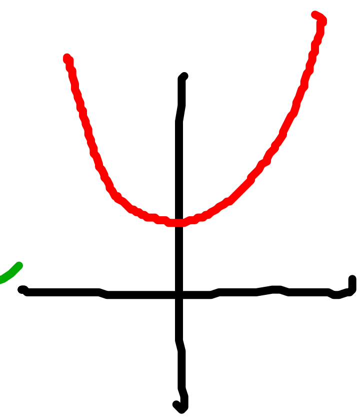
Falls A nicht vollen Rang hat, gibt es $\ell \in \mathbb{R}^n$ die nicht im Bild von A liegen

---

Bsp im $\mathbb{R}^2$: OBdA $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \ell = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \notin \text{Bild}(A)$

$$v^T A v + \langle v, \ell \rangle = C \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v$$

$$a \cdot x^2 + y \cdot r = C \iff y = \frac{C - ax^2}{r}$$ Parabelgleichung

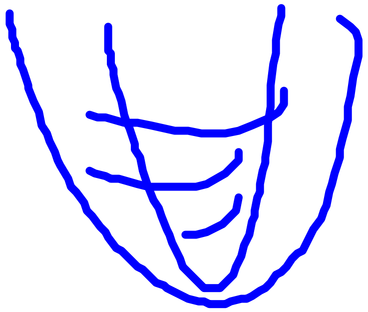


Im $\mathbb{R}^3$

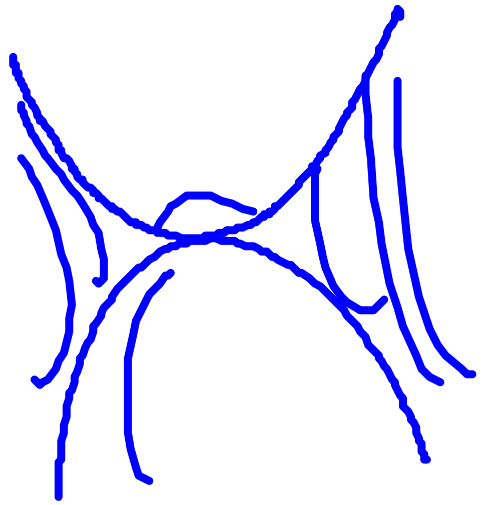
$a>0,\ b>0$

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

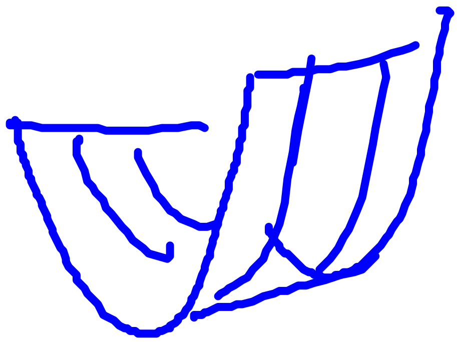
$$-z = ax^2 + by^2 - c$$



$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & -b & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ s \end{pmatrix}$$



3.6. Algebraische + geometrische Vielfachheit

Wir hatten: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar g.d.w.
Es gibt eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ aus
Eigenvektoren von A.

Satz: A ist diagonalisierbar über $\mathbb{K}$ $\Rightarrow$
$p_A(\lambda)$ zerfällt über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren

Bew $A = T^{-1} D T$ mit Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = p_D(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

Zweite Wichtige Voraussetzung für Diagonalisierbarkeit:

- Algebraische Vielfachheit eines EW ist identisch mit sei geometrischen Vielfachheit.

Wichtige Begriffe: A sei $n \times n$ Matrix:

- Algebraische Vielfachheit:

  sei $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots \cdots (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$ mit

  λ_i paarweise verschieden und $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$

  $r(\lambda_i) := r_i$ heißt alg. Vielfachheit von λ_i

- Eigenraum

  $Eig(\lambda_i) := Kern(A - \lambda_i E)$ = Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_i \neq 0$

- geometrische Vielfachheit:

  $g(\lambda_i) = \dim(Eig(\lambda_i))$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$
$$= (2-\lambda)^2 (3-\lambda)^1$$

Alg. Vielfachheit

$r(2) = 2$, $r(3) = 1$

Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}(2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathrm{Eig}(3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{K} \right\}$$

geometrische Vielfachheit

$g(2) = \dim(\mathrm{Eig}(2)) = 1$

$g(3) = \dim(\mathrm{Eig}(3)) = 1$

Satz: Sei λ Eigenwert von A dann gilt:

$$1 \leq g(\lambda) \leq r(\lambda)$$

Beweis $\Rightarrow$ Übungsaufgabe

Satz: Die Menge der Eigenwerte als auch die Funktionen $r(\lambda)$ und $g(\lambda)$ sind invariant unter Ähnlichkeitstrafos.

Bew • Menge der EW und $r(\lambda)$ klar da $p_A(\lambda)$ invariant

Sei $B = TAT^{-1}$, T invertierbar

• $v \in \mathrm{Kern}(A - \lambda E)$

$\Leftrightarrow (A - \lambda E)v = 0$

$\Leftrightarrow T(A - \lambda E)T^{-1}Tv = 0$

$\Leftrightarrow (TAT^{-1} - \lambda TET^{-1})Tv = 0$

$\Leftrightarrow (B - \lambda E)Tv = 0$

$\Leftrightarrow Tv \in \mathrm{Kern}(B - \lambda E)$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Kern}(A - \lambda E))$
$= \dim(\mathrm{Kern}(B - \lambda E))$

Satz: A ist diagonalisierbar über $\mathbb{K}$ g.d.w.

(i) $p_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren

(ii) $g(\lambda) = r(\lambda)$ für alle EW λ von A

Bew: A diagonalisierbar $\Rightarrow$ p_A zerfällt in Linearfaktoren und es gibt eine Basis B aus EV von A

Sei $v_{i,1}, \dots, v_{ik_i}$ die zu λ_i gehörigen Basisvektoren in B

$\Rightarrow k_i \le g(\lambda_i) \le r(\lambda_i)$ da jedes v_{ij} in $\mathrm{Eig}(\lambda_i)$ liegt

Ferner gilt $\sum r(\lambda_i) = n$ und $\sum k_i = n$

$$\Rightarrow k_i = r(\lambda_i) \Rightarrow k_i = g(\lambda_i) = r(\lambda_i)$$

Noch zu zeigen: „aus (i) und (ii) folgt diagonalisierbar"

Ang (i) und (ii) gilt also $p_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren

insgesamt n

Und es gilt $g(\lambda) = r(\lambda)$ für alle EW.

Betrachte $\mathrm{Eig}(\lambda_1) \oplus \mathrm{Eig}(\lambda_2) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(\lambda_m)$

Summe ist direkt weil Hausaufgabe 56

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ alle paarweise versch. EW von A sind

$$\underbrace{\mathrm{Eig}(\lambda_1)}_{\mathrm{span}(v_{11}, \dots, v_{1k_1})} \qquad \underbrace{\mathrm{Eig}(\lambda_2)}_{\mathrm{span}(v_{21}, \dots, v_{2k_2})} \qquad \dots \qquad \underbrace{\mathrm{Eig}(\lambda_m)}_{\mathrm{span}(v_{m1}, \dots, v_{mk_m})}$$

Basis

$\Rightarrow$ Vereinigung aller v_{ij} ist Basis von $\mathbb{K}^n$

Die nächsten Fragen:

(i) • Was tun, wenn $p_A(\lambda)$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

(ii) • Was tun wenn $r(\lambda) \neq g(\lambda)$

Antworten

zu (i) über $\mathbb{R}$ studieren wir den Spezialfall der Normalformen von $O(n)$ Matrizen.

zu (ii) Triagonalisierbarkeit und Jordansche Normalform

3.7. Normalform einer $O(n)$ Matrix