Letztes Mal:

(oder hermitesche)

Jede symmetrische $n \times n$ Matrix

- ist diagonalisierbar
- hat nur reelle Eigenwerte
- hat ONB aus Eigenvektoren

symmetrisch oder Hermitesch

$$A = T D T^{-1}$$

Diagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ONB aus Eigenvekt.

3.5 Quadratische Formen, Kegelschnitte & Quadriken

Einheitskreise zu einer Skalarproduktnorm:
Sei $A = A^T$. Die Menge $Q_A = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v^T A v = 1 \}$ ist Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung.
Man nennt eine solche Lösungsmenge eine „Quadrik" (verallgemeinerten Kegelschnitt, später mehr davon)

<u>Bsp im $\mathbb{R}^3$</u>

$$(x, y)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 1 \cdot xy + 1yx + 1 \cdot y^2$$
$$= 2x^2 + 2xy + y^2 \qquad = 1$$

Eigenwerte / Eigenvektoren

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$
$$\lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} \ldots$$

Man nennt $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto v^T Q v$ eine Quadratische Form

Q ist beliebige Matrix

Bem: jede quadratische Form ist äquivalent zu einer Quadratischen Form mit symmetrischer Matrix

„Bew"

$$v^T Q v = v^T \left(\frac{Q+Q^T}{2}\right) v$$

Bsp $(x,y)\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$= 2\cdot x^2 + 1\cdot y^2 + (2+0)xy$

$= (x,y)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

Kegelschnitte: Lösungsmenge eines quadratischen Polynoms in x,y

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\right\}$$

Quadriken: Lösungsmenge eines quadratischen Polynoms in n-Variablen im $\mathbb{R}^n$

Im Allgemeinen $\binom{n+2}{2}$ Parameter.

Kegelschnitte/Quadriken $\Longleftrightarrow$ Quadratische Formen

$$\underbrace{ax^2+bxy+cy^2}+\underbrace{dx+ey}+f = 0$$

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \right\rangle + f$$

Konstanter Term

quadratischer Anteil   linearer Anteil

Allgemeine Quadriken:

$$Q_{A,\ell,c} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v^T A v + \langle v, \ell \rangle = c \}$$

Symmetrische Matrix

Zunächst Spezialfälle $\ell = 0$

$v^T A v = c$

<u>Satz</u> Sei $Q_{A,\ell,c}$ eine nicht leere Quadrik der nicht komplett in einer Hyperebene liegt gleichwertig (i) $\ell = 0$

(ii) $Q_{A,\ell,c}$ ist Zentralsymmetrisch bezüglich des Nullpunktes

Bew (i) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $v \in Q_{A,\ell,c}$ also mit $\ell = 0$

$v^T A v = c \Rightarrow (-v)^T A(-v) = v^T A v = c \Rightarrow -v \in Q_{A,\ell,c}$

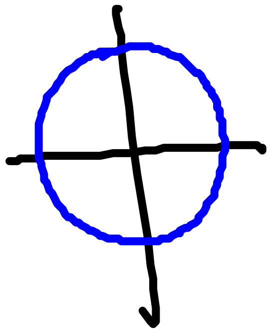
$\neg$(i) $\Rightarrow \neg$(ii) Sei $\ell \neq 0$ da $Q_{A,\ell,c}$ nicht in Hyperebene

$\exists v \in Q_{A,\ell,c}$ mit $\langle v, \ell\rangle \neq 0$

$(-v)^T A(-v) + \langle -v, \ell\rangle - c = -2\langle v, \ell\rangle \neq 0 \Rightarrow -v \notin Q_{A,\ell,c}$

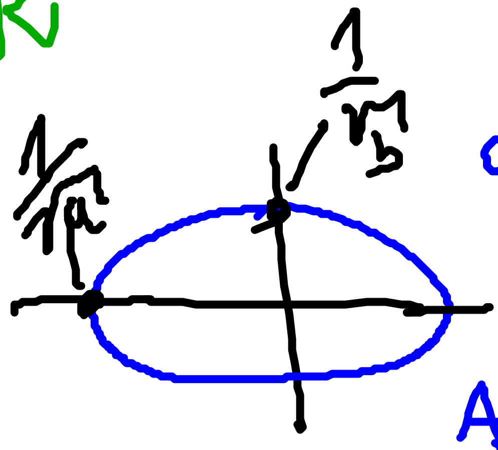
Betrachte $v^T A v = 1$ (oder $v^T A v = 0$) sind im Wesentlichen die Zentralsymmetrischen Quadriken um Nullpunkt

Beispiele im $\mathbb{R}^2$



$x^2+y^2=1$

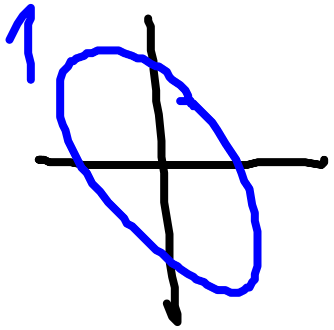
$A=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$



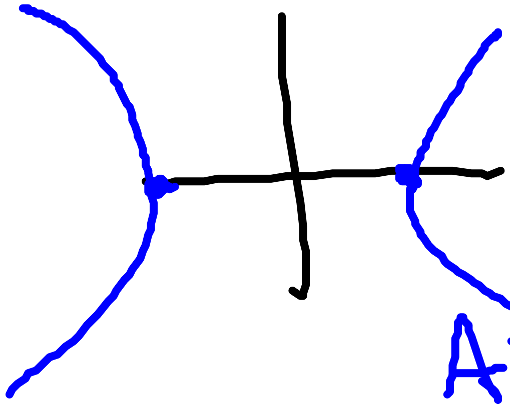
$ax^2+by^2=1$

$A=\begin{pmatrix}a & \\ & b\end{pmatrix}$

$a>0,\ b>0$



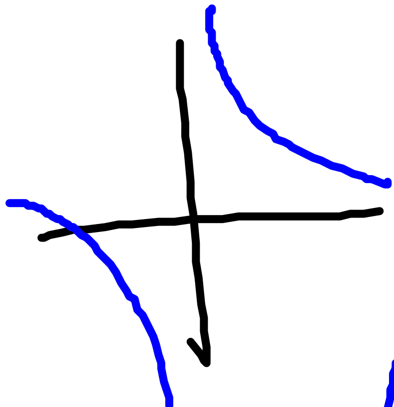
$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$



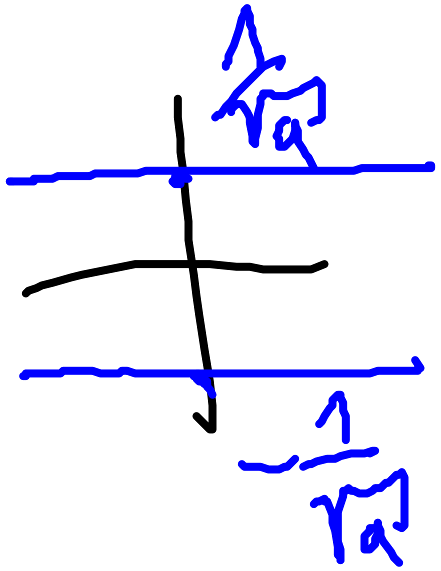
$ax^2-by^2=1$

$A=\begin{pmatrix}a & \\ & -b\end{pmatrix}$

$a>0,\ b>0$



$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$

$a>0$

$a y^2=1$

Satz Sei $Q_{A,C} = \{v \mid v^T A v = C\}$ eine Quadrik. Dann ist $Q_{A,C}$ bis auf Drehung ($SO(n)$ Operation) äquivalent zu einer Quadrik ohne gemischte Terme

Bew A ist symmetrisch $\Rightarrow$ $A = T^{-1} D T$, $T \in SO(n)$, D Diagonal, also $T^{-1} = T^T$

$$Q_{A,C} = \{v \mid \underbrace{v^T T^T}_{(Tv)^T} D \underbrace{Tv}_{(Tv)} = C\}$$

(Tv) um T gedrehte Vektor v

$Q_{D,C} = \{v \mid v^T D v = C\}$ ist gedrehte Quadrik

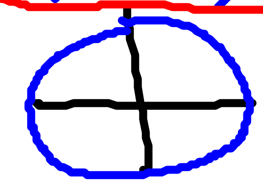
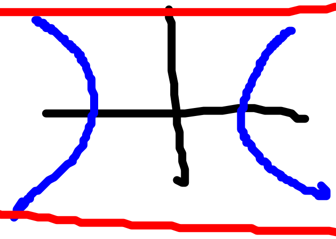
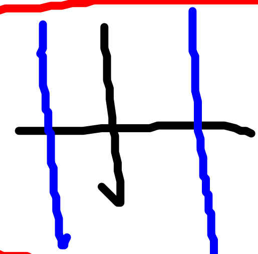
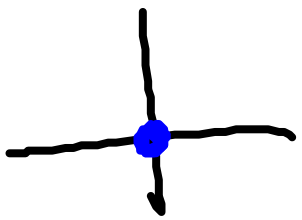
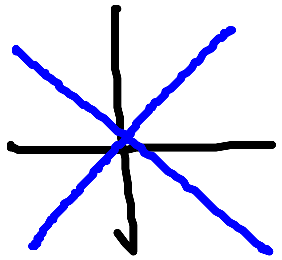
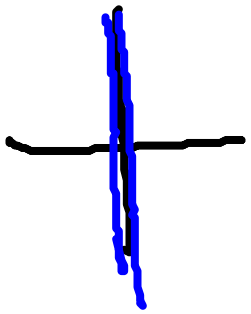
Bem Diagonalelemente sind die Eigenwerte von A

Typen von Zentralsymmetrischen Quadriken

Wir betrachten $Q_{A,c} = \{v \mid v^T A v = c\}$ oBdA $c = 1$
oder $c = 0$

Bem: Damit $Q_{A,c}$ nicht leer muss entweder $c=0$ sein oder mindestens ein Eigenwert nicht-negativ sein

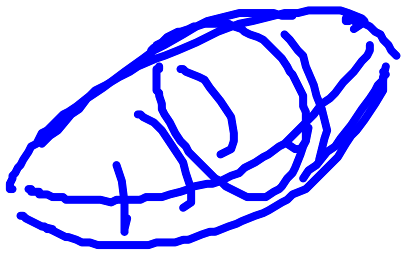
$\mathbb{R}^2$ Es sei $a > 0$, und $b > 0$

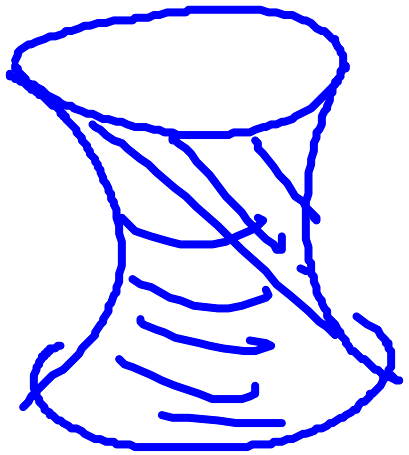
	Fall 1 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$	Fall 2 $\begin{pmatrix} a & \\ & -b \end{pmatrix}$	Fall 3 $\begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix}$	Fall 4 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
I $c=1$				$\emptyset$
II $c=0$				$\mathbb{R}^2$

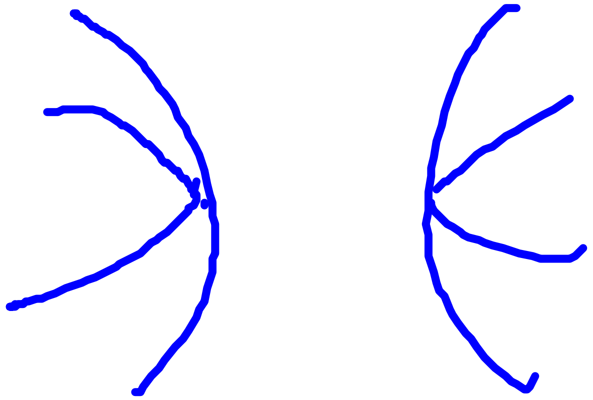
im $\mathbb{R}^3$ (nach Rotation verschwinden die gemischten Terme) Es sei $a>0$, $b>0$, $c>0$

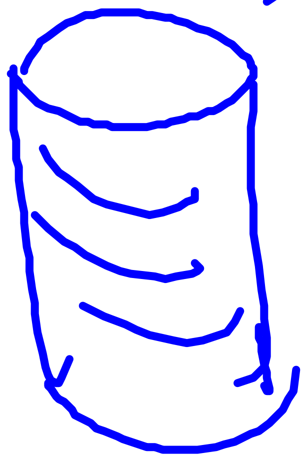
I $C=1$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & & \\ & -b & \\ & & -c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

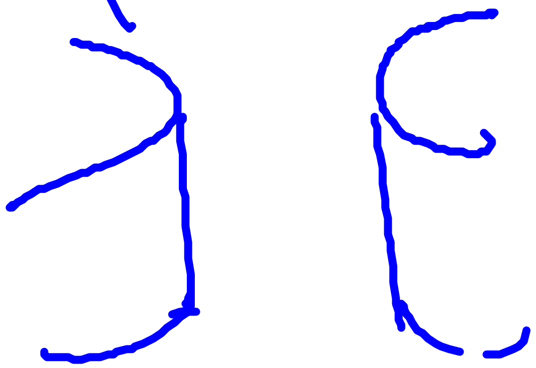


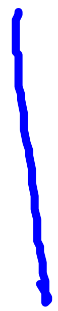


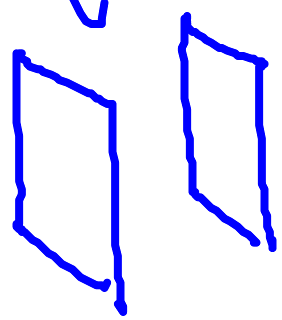




$$\begin{pmatrix} a & & \\ & -b & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -a & & \\ & -b & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

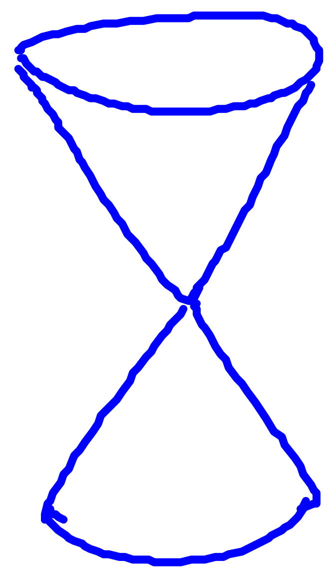


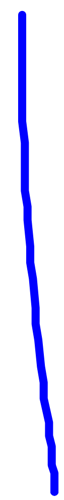


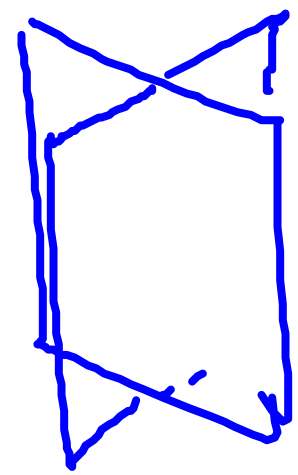


II $C = 0$

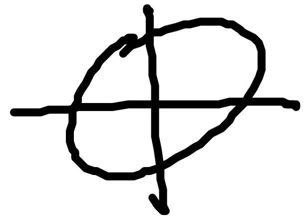
$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & -c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & & \\ & -b & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

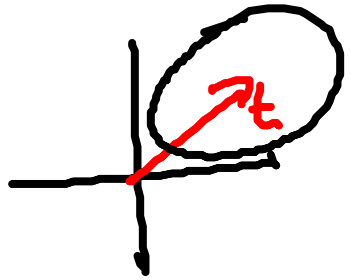






Was macht ℓ in $v^TAv + \langle v, \ell \rangle - C = 0$

Sei $Q_{A,C} = \{ v \mid v^TAv = C \}$ 

Betrachte: Um t verschobene Quadrik 

$$(v-t)^T A (v-t) = C$$

$$\Leftrightarrow v^TAv - v^TAt - t^TAv + t^TAt = C$$

$$\Leftrightarrow v^TAv - \langle v, At \rangle - \langle At, v \rangle = C - t^TAt$$

$$\Leftrightarrow v^TAv + \langle v, \ell \rangle = C'$$

$\ell = -2At$

$C' = C - t^TAt$

Also: jede verschobene zentralsymmetrische Quadrik führt zu $\ell \neq 0$

Frage: Kann ich jede Quadrik so darstellen?