Kleiner Nachtrag:

Letztes Mal Satz: Es gibt eine Basis aus EV von A

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar

Bem Die Umkehrung gilt auch.

Bew: Sei A diagonalisierbar $\Rightarrow$ ex $T = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ mit

Ist Basis, T invertierbar

$A = TDT^{-1}$; $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$Av_i = TDT^{-1}v_i = TDe_i = T\lambda_i e_i = \lambda_i Te_i = \lambda_i v_i$

Satz: A diagonalisierbar g.d.w

$\mathbb{K}^n$ hat Basis aus Eigenvektoren von A

3.4. Hauptachsentransformation

In diesem Abschnitt speziell:

- symmetrischen Matrizen $(A^T = A)$
- hermitesche Matrizen $(A^T = \bar{A})$

Ziel: Aussagen über Diagonalisierbarkeit.

Erste Beobachtung:

Satz 1 Sei A hermitesch (oder symmetrisch reell) so sind alle EW reell.

Bew (hermitesch): Betrachte $\langle Av, w\rangle = v^T A^T \bar{w} = v^T \bar{A}\bar{w} = \langle v, Aw\rangle$

Sei $v \neq 0$ mit $Av = \lambda v$:

$$\lambda\langle v,v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v,v\rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Def $f: V \to V$ linearen Endomorphismus heißt **selbstadjungiert** wenn $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$.

Satz: Sei $V = \mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) und $f(v) = A \cdot v$ (bezgl. Standardbasis)

f ist selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ A hermitesch (symmetrisch)

Bew Sei A hermitesch

$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle \Rightarrow f$ ist selbstadj.

Sei f selbstadjungiert

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Zu zeigen $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ für alle i,j

Betrachte $\underbrace{e_i^T A^T \overline{e_j}}_{A_{ji}} = \langle Ae_i, e_j\rangle = \langle e_i, Ae_j\rangle$

$= \underbrace{e_i^T \overline{A}\,\overline{e_j}}_{\overline{A_{ij}}}$

$\Rightarrow A^T = \overline{A}$

Satz 3 Sei $f(v) = A \cdot v$ selbstadjungiert so gibt es eine ONB aus Eigenvektoren von A.

Bew Sei $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ Beweis durch Ind. über n

- Induktionsanfang $n=1$ trivial.
- Induktionsschluss: Sei $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ mit $\|v_1\| = 1$

  Betrachte $W = (\operatorname{span}(v_1))^\perp$

  - Es gilt $w \in W \Rightarrow f(w) \in W$

    Bew: Sei $w \in W$, $\langle v_1, w \rangle = 0$

    $$\langle v_1, Aw \rangle = \langle Av_1, w \rangle = \langle \lambda_1 v_1, w \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle v_1 w \rangle}_{0} = 0$$

Betrachte $f': W \to W$ (Einschränken von f auf W, $f'(w) = f(w)$)

f' ist selbstadj $\Rightarrow W$ hat ONB $w_1, \dots, w_{n-1}$ aus EV von f' (also auch von f)

$\Rightarrow v_1 w_1, \dots, w_{n-1}$ ist ONB von $\mathbb{C}^n$

Beweis funktioniert analog für reelle symmetrisch

Satz 4

- Sei A hermitesch über $\mathbb{C}^{n\times n}$
  $\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar mit $A = TDT^{-1}$
  $= TD\bar{T}^T$
  mit $T \in SU(n)$, D reelle Diagonalmatrix
- Sei A symmetrisch aus $\mathbb{R}^{n\times n}$
  $\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar mit $A = TDT^{-1} = TDT^T$
  mit $T \in SO(n)$ D reelle Diagonalmatrix

Bew: • A hat ONB $v_1, \dots, v_n$ aus Eigenvektoren (Satz 3)

• $T = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ $\qquad A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$

• $T \in SU(n)$ wg Satz 3 (ONB) ; D reell wg Satz 1
(bzw $SO(n)$)

Zusammenfassend:

Symmetrische / hermitesche Matrizen besitzen reelle Eigenwerte und ONB aus Eigenvektoren

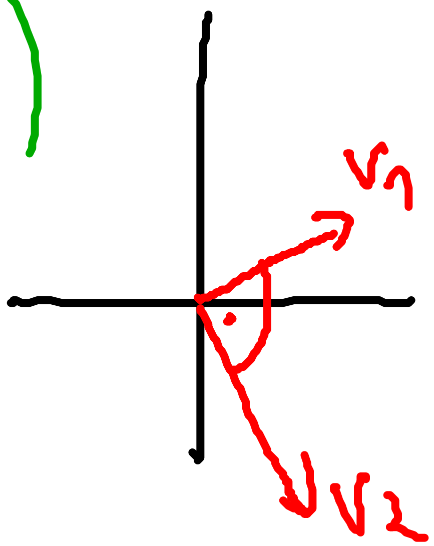
Geometrische Interpretation (reeller Fall)

Ist $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ mit A symmetrisch

So kann man ein rechtwinkliges Koordinatensystem so hineinlegen, dass entlang der Achsen nur skaliert wird

Bsp aus 3.1

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2+\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{v_1}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2-\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{v_2}$



Symmetrische Matrizen und Bilinearformen

In Kapitel 1 hatten wir:

- $s(v,w): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann symmetrische Bilinearform wenn $s(v,w) = v^T A w$ mit A symmetrisch ist.
- $s(v,w): \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ist genau dann hermitesche sesquilinear wenn $s(v,w) = v^T A \overline{w}$ mit A hermitesch

---

Wichtige Begriffe im Zusammenhang mit Bilinearformen

- Positiv definit: $s(v,v) \geq 0$ für alle v
  $s(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

notwendig für Skalarprodukt

- Einheitskreise einer Norm
  $\{v \mid s(v,v) = 1\}$

Satz: $s(v,w) = v^T A \bar{w}$ ist genau dann positiv definit wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

Bew (Komplexenfall): Sei s positiv definit $\Rightarrow s(v,v) > 0$ für alle $v \neq 0$

Sei $\bar{v} \neq 0$ Eigenvektor von A

$$0 < s(v,v) = v^T A \bar{v} = v^T \lambda \bar{v} = \lambda \underbrace{v^T \bar{v}}_{>0} \Rightarrow \lambda > 0$$

Bem: ist $v_1 \dots v_n$ ONB so ist auch $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ ONB

Sei $\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n$ eine ONB mit Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ von A

und $0 \neq v = \alpha_1 \bar{v}_1 + \dots + \alpha_n \bar{v}_n$

$$v^T A \bar{v} = \left(\sum \alpha_i \bar{v}_i^T\right) A \cdot \left(\sum \bar{\alpha}_i \bar{\bar{v}}_i\right) =$$

$$\left(\sum \alpha_i \bar{v}_i^T\right) \cdot \sum \bar{\alpha}_i A v_i = \left(\sum \alpha_i \bar{v}_i^T\right) \cdot \left(\sum \bar{\alpha}_i \cdot \lambda_i \cdot v_i\right)$$

$$= \sum |\alpha_i|^2 \cdot \lambda_i > 0$$

Da $\lambda_i > 0$ und mind ein $\alpha_i \neq 0$