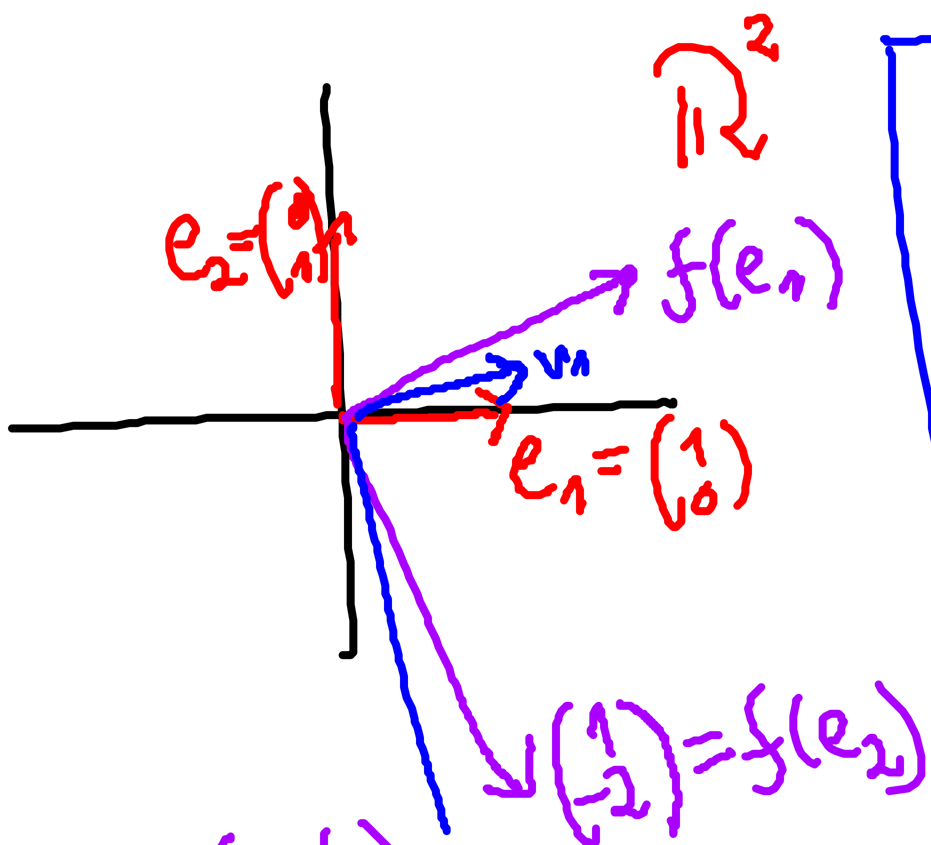
3 Normalformen + Invarianten

3.1 Was macht eine Matrix eigentlich

Bsp Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$



Man (ich) sieht daran nicht sehr viel

v_2

Eigenwerte, Eigenvektoren

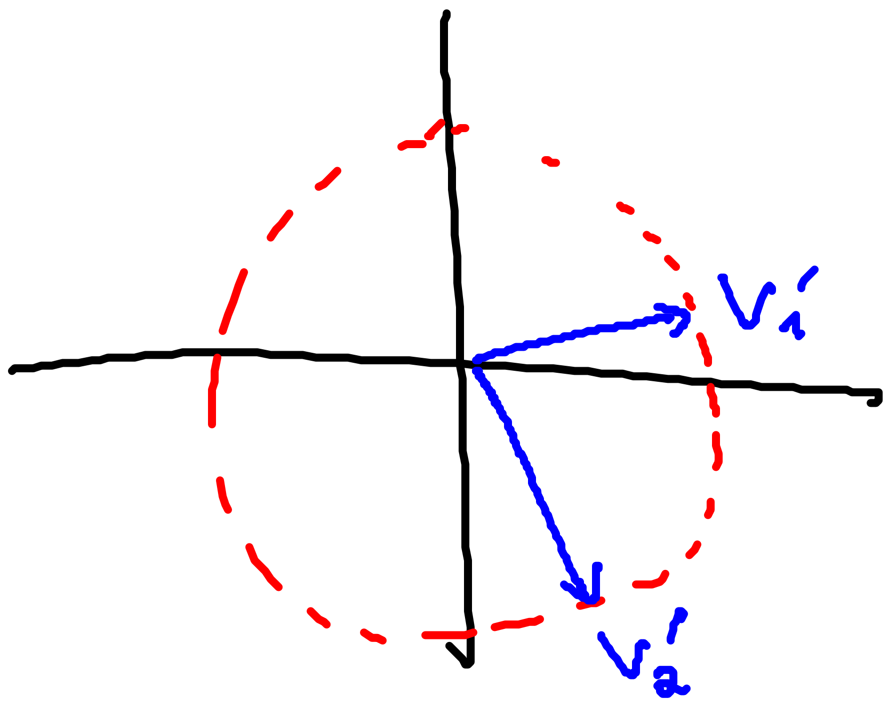
$$P_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}2-\lambda&1\\1&-2-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-4-1=\lambda^2-5$$

$$\lambda_{1/2}=\pm\sqrt{5}\quad\ldots\;\ldots$$

Eigenvektoren

$$\ldots\; v_1=\begin{pmatrix}1\\-2+\sqrt5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1\\0{,}23..\end{pmatrix},\; v_2=\begin{pmatrix}1\\-2-\sqrt5\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1\\-4{,}23..\end{pmatrix}$$

$$v_1\perp v_2$$



$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

bezüglich der Basis v_1', v_2' hat f die Form $\boxed{\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$

an dieser Matrix sieht man mehr.

Zwei Sichtweisen

abstrakt: Vektorraum V; linearer Endomorphismus
$f: V \to V$
V ist Menge von Vektoren
f bildet jedes El. $v \in V$ auf $f(v)$ ab

konkret koordinatenbezogen:
konkret bzgl. bestimmten Basis: Sei $V = \mathbb{K}^n$ und $v_1 \dots v_n$ Basis des $\mathbb{K}^n$

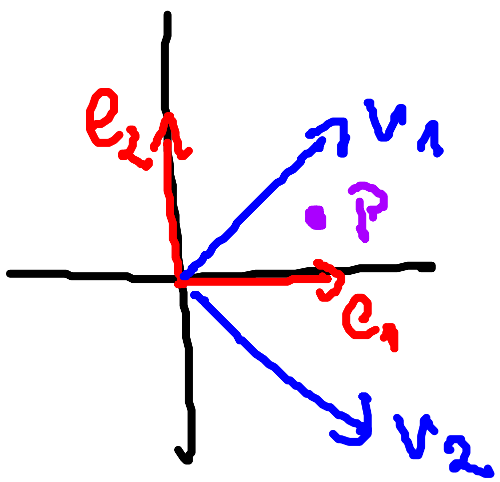
$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} := \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$
$$x \mapsto Ax$$

$n \times n$ Matrix $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ f(v_1) & \dots & f(v_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$

Die gleiche Abb. führt bezügl. unterschiedlicher Basen zu anderen Matrizen.

Darstellung bzgl anderen Basis



Sei A eine Matrix bzgl der Standardbasis e_1, e_2.

Sei $v_1\ v_2$ eine andere Basis

$$P = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Darstellung von A bzgl $v_1\ v_2$:

$$T = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{T^{-1} \cdot A \cdot T}_{\text{Darstellung von } A \text{ bzgl } v_1\, v_2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Fragen:

$\boxed{\text{Normalformen:}}$

„Für welche T wird $T^{-1}AT$ möglichst einfach"

$\boxed{\text{Invarianten}}$

Für welche φ gilt $\varphi(A) = \varphi(T^{-1}AT)$ für alle T

3.2 Invarianten

Sei A beliebige $n\times n$ Matrix, T invertierbare $n \times n$ Matrix

Invarianten:

- Determinante

$$\det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1})\det(A)\det(T) = \det(A)$$

- Charakteristisches Polynom

$$P_{T^{-1}AT}(\lambda) = \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET)$$
$$= \det(T^{-1})\cdot\det(A-\lambda E)\cdot\det(T) = \det(A-\lambda E) = P_A(\lambda)$$

- Koeffizienten des char. Polynoms sind Invarianten (z.B. $\det(A)$, $\mathrm{spur}(A)$)

- Nullstellen von P_A (incl. Vielfachheiten)

  $\sim$ Menge der Eigenwerte

Achtung: Eigenvektoren sind KEINE Invarianten

3.3. Diagonalisierbarkeit

Satz Sei A eine $n\times n$ Matrix und sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A (so etwas muss es nicht immer geben). Dann ist A „Diagonalisierbar" d.h. Es gibt T mit $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Bew: Sei $T = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$T^{-1}ATe_i = T^{-1}Av_i = \lambda_i(T^{-1}v_i) = \lambda_i \cdot e_i$$

$$\Rightarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bem in diesem Fall

$$A = T\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diagonalmatrix}}}{D}T^{-1}$$

Anwendung: Potenzen von Matrizen:

Sei A diagonalisierbar was ist A^{100}

$$A = TDT^{-1} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = (TDT^{-1}) \cdot (TDT^{-1}) \cdot \ldots \cdot (TDT^{-1})$$

$$= TD^{100}T^{-1}$$

$$D^{100} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{100} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{100} \end{pmatrix}$$

Was ist $\exp(A)$

$$\exp(A) := E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$$

$$\exp(A) = TT^{-1} + TDT^{-1} + \frac{TD^2T^{-1}}{2!} + \frac{TD^3T^{-1}}{3!} + \ldots = T\exp(D)T^{-1}$$

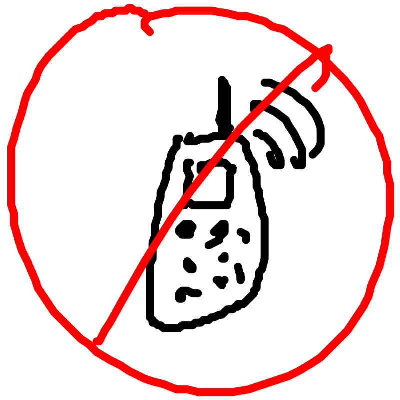
$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Satz sei A diagonalisierbar $\quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

dann ist $p_A(A) = 0$ ← Nullmatrix

Bew $A = TDT^{-1}$

$$p_A(A) = p_A(TDT^{-1}) = T\,\underbrace{p_A(D)}_{\begin{pmatrix} p_A(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_A(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0}\,T^{-1} = 0$$



Satz Sei B ähnlich zu A

$\Rightarrow p_A(B) = 0$

Bew: $B = SAS^{-1}$

$$p_A(B) = S\,\overbrace{p_A(A)}^{0}\,S^{-1} = 0$$

Bemerkung:

Beide Sätze gelten auch für nicht-diagonalisierbare Matrizen

(wird hier nicht bewiesen, wesentlich schwerer) Satz von Cayley Hamilton

Satz Seien $v_1 \ldots v_m$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \ldots \lambda_m \Rightarrow v_1 \ldots v_m$ sind linunabh.

Bew: Induktion über m

$\underline{m=1}$: klar da $v_1 \neq 0$

Sei der Satz bewiesen für $m-1$ Vektoren

Angenommen $0 = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_m v_m$ eine nicht-triviale Linearkombination

Betracht: $0 = A0 - \lambda_1 0$

$$= (\alpha_1 A v_1 + \ldots + \alpha_m A v_m) - (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_1 v_m)$$

$$= (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots \alpha_m \lambda_m v_m) - (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_1 v_m)$$

$$= \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} v_2 + \ldots + \alpha_m \underbrace{(\lambda_m - \lambda_1)}_{\neq 0} v_m$$

$\overset{\text{wg Ind.}}{\Rightarrow}$ $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \lightning$

Folgerung: hat eine $n \times n$ Matrix über $\mathbb{K}$ n verschiedene Eigenwerte in $\mathbb{K}$ so ist sie diagonalisierbar.

<u>Achtung</u>: EW müssen nicht in $\mathbb{K}$ liegen