Letzte Stunde: SU(2) Operationen

- SU(2) Matrizen: $\begin{pmatrix} r & s \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix}$ $\quad |r|^2+|s|^2=1$

  andere Darstellung $\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}$ $\quad a^2+b^2+c^2+d^2=1$

  $SU(2) \sim S^3$

- SU(2) operiert auf

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2 \arrow[d, bend right, "\text{Identifiziere skalare Vielfache}"'] \\ \mathbb{CP}^1 \arrow[d, bend right, "\omega \sim \left[\binom{\omega}{1}\right]"'] \\ \hat{\mathbb{C}} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Stereographische Projektion}"'] \\ S^2 \end{tikzcd}$$

$\binom{\alpha}{\beta} \mapsto A\cdot\binom{\alpha}{\beta}$ $\quad A \in SU(2)$

$\left[\binom{\alpha}{\beta}\right] \mapsto \left[A\cdot\binom{\alpha}{\beta}\right]$

$\omega \mapsto \dfrac{r\omega+s}{-\bar{s}\omega+\bar{r}} =: f_A(\omega)$ $\quad$ + Sonderfallbehandlung für ∞

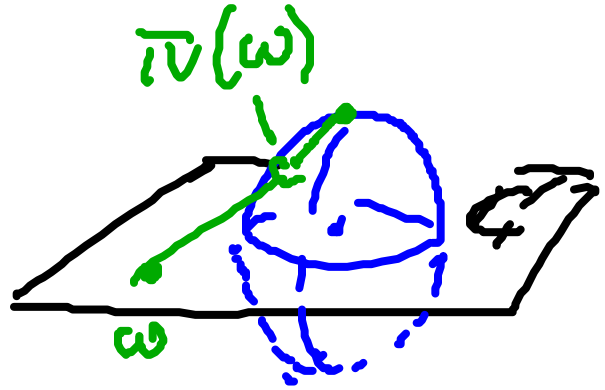
$P \mapsto \pi\left(f_A\left(\pi^{-1}(P)\right)\right)$

- Stereographische Projektion

$$\hat{\mathbb{C}} \longrightarrow S^2 \qquad\Bigg|\qquad S^2 \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$$

$$w = a+ib \longmapsto \frac{1}{|w|^2+1}\begin{pmatrix}2a\\2b\\|w|^2-1\end{pmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \longmapsto (x+iy)\cdot\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

$$\infty \longmapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad\Bigg|\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \longmapsto \infty$$



+ Sonderfälle für ∞

- Für Eigenvektoren v, w eine Matrix $A \in SU(2)$ zu versch. Eigenwerten gilt $\langle v, w\rangle = 0$ $(v \perp w)$
- Bei Operation von A auf $\mathbb{C}P^1$, $\hat{\mathbb{C}}$, S^2 entsprechen die Eigenvektoren den Fixpunkten
- A läßt antipodale Punkte auf S^2 fest

Ziel für heute:

$A \in SU(2)$ ist auf Kugel Tatsächlich eine Drehung.

Dazu noch zwei Räume:

- Menge der hermiteschen 2×2 Matrizen:

$$H(2) = \{ H \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid H^T = \overline{H} \}$$

$$\begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$$

$t, z, x, y \in \mathbb{R}$

- Menge der Spurfreien Hermitesche 2×2 Matrizen

$$\tilde{H}(2) = \{ H \in H(2) \mid \mathrm{spur}(H) = 0 \}$$

$$\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}$$

$\cong \mathbb{R}^3$

Hermitesche Matrizen!

$H^T = \overline{H}$ $\qquad \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix} = H$ $\qquad$ Sei $t=0 \iff \mathrm{spur}(H) = 0$

$\det \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} = -z^2 - x^2 - y^2 = -\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\|$

Spurfreie Hermitesche 2×2 Matrizen $\sim \mathbb{R}^3$

$SU(2)$ operiert auf $H(2)$ und auf $\tilde{H}(2)$

$H \in H(2) \qquad A \in SU(2)$

$H \mapsto \overline{A}\, H\, A^T$ $\Leftarrow$ Ergebnis ist hermitesch, Abb. ist linear, Abb. erhält $\det(H)$ und $\mathrm{spur}(H)$

$$H = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}, \quad A \in SU(2)$$

$$\varphi_A \quad \tilde{H}(2) \to \tilde{H}(2)$$

$$H \mapsto \bar{A} H A^T = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}$$

- linear
- $\det(H) = \det(\bar{A} H A^T)$
- $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\|$

$\Rightarrow$ $\bar{A} H A^T$ ist $O(3)$ operation in $\mathbb{R}^3$

Stereographische Projektion als Abb nach $\tilde{H}(2)$

Zur Erinnerung $\hat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{CP}^1$

repräsentiere $\omega \in \hat{\mathbb{C}}$ durch $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ mit $\|v\| = \sqrt{2}$

$$v = \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\omega|^2+1}} \cdot \sqrt{2}$$

Betrachte $\bar{v}\, v^T = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix} (\alpha\ \beta) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \beta\bar{\alpha} \\ \alpha\bar{\beta} & |\beta|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$

Hermitesche Matrix rang $= 1$

$$\operatorname{spur}(\bar{v} v^T) = \underbrace{|\alpha|^2 + |\beta|^2}_{2} = 2t \Rightarrow t = 1$$

$$0 = \det(\bar{v} v^T) = \underset{1}{t^2} - z^2 - x^2 - y^2 \Rightarrow 1 = x^2 + y^2 + z^2$$

$\bar{v} v^T - E \in \tilde{H}(2)$ und „liegt auf" S^2

$\bar{v}\, v^T$ läßt sich als stereographische Proj. interpretieren

$$\underset{\substack{\| \\ a+ib}}{\omega} \in \hat{\mathbb{C}}$$

$$\downarrow$$

$$v = \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{|\omega|^2+1}} \in \mathbb{C}^3$$

$$\downarrow$$

$$\bar{v}\, v^T = \frac{2}{|\omega|^2+1} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{|\omega|^2} & \bar{\omega} \\ \boxed{\omega} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1+z} & x-iy \\ \boxed{x+iy} & 1-z \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{|\omega|^2+1} \cdot \omega = x+iy$$

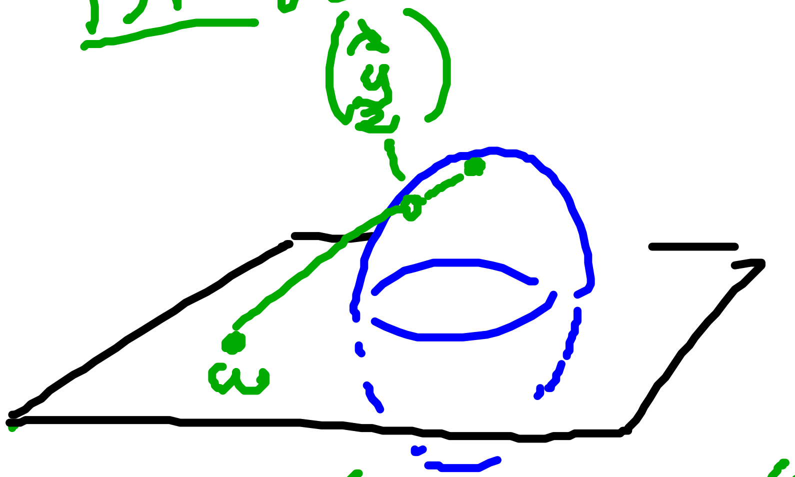
$$\frac{2|\omega|^2}{|\omega|^2+1} = 1+z \Rightarrow z = \frac{|\omega|^2-1}{|\omega|^2+1}$$

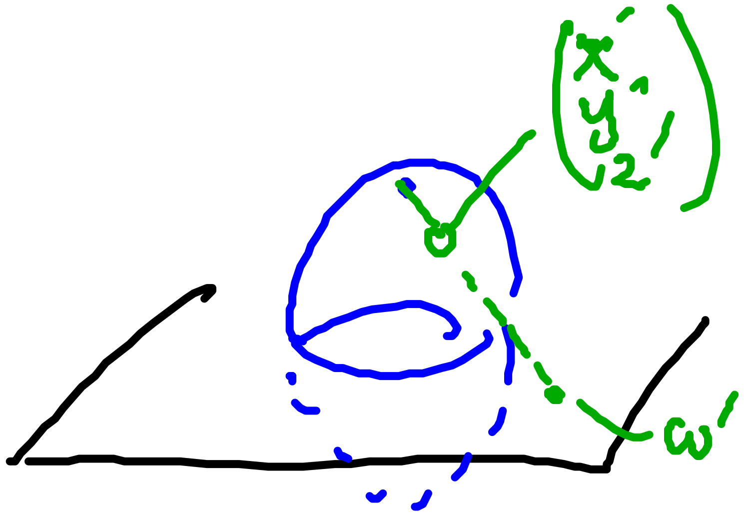
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{|\omega|^2+1} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ |\omega|^2-1 \end{pmatrix}$$

Das ist genau die Formel für stereographische Proj.

Aktion von $SU(2)$ auf S^2

Bild 1

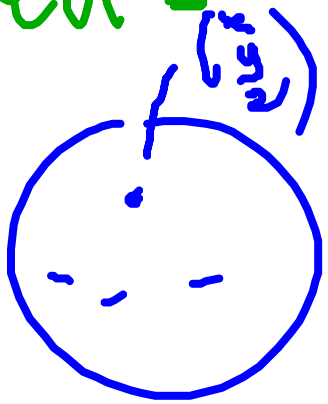




Beide Abbildungen sind gleich

$$\pi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = w \sim \begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{A} A \cdot \begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix} \sim w' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Bild 2



Das ist eine Drehung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}}_{H} \xmapsto{A} \bar{A} H A^T = \begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Quaternionen

$$A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{=}\ SU(2)$

$$= a\cdot\mathbb{1} + b\cdot\mathbb{i} + c\cdot\mathbb{j} + d\cdot\mathbb{k}$$

Rechenregeln $\quad \mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = -\mathbb{1}$

$$\mathbb{i}\cdot\mathbb{j} = \mathbb{k},\ \mathbb{j}\cdot\mathbb{i} = -\mathbb{k},\ \mathbb{j}\cdot\mathbb{k} = \mathbb{i},\ \mathbb{k}\cdot\mathbb{j} = -\mathbb{i},\ \mathbb{k}\cdot\mathbb{i} = \mathbb{j},\ \mathbb{i}\cdot\mathbb{k} = -\mathbb{j}$$

$$\bar{v}\cdot v^T - E = \begin{pmatrix} 2 & x-iy \\ x+iy & -2 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} + x\cdot\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}$$

$$2\cdot(-i\cdot\mathbb{i}) + x\cdot(-i\cdot\mathbb{k}) + y\,(-i\cdot\mathbb{j})$$

Rotation:

$q = a \cdot \mathbb{1} + b\,\mathbb{i} + c \cdot \mathbb{j} + d \cdot \mathbb{k}$ $\quad a^2+b^2+c^2+d^2=1$

Drehachse (x, y, z) Winkel α $\quad x^2+y^2+z^2=1$

$(a, b, c, d) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}, x \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, y \cdot \sin\frac{\alpha}{2}, z \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)$

Punkt $p = x \cdot \mathbb{i} + y \cdot \mathbb{j} + z \cdot \mathbb{k}$

$\boxed{\begin{array}{l} q^{-1} = \bar{q} \\ \bar{q} := a \cdot \mathbb{1} - b \cdot \mathbb{i} - c \cdot \mathbb{j} - d \cdot \mathbb{k} \end{array}}$

Rotation

$p' = q^{-1}\, p\, q = \bar{q}\, p\, q$

Hinterausführung von Rotationen q, q' ist $q \cdot q'$