2.6. Die Gruppe $SU(2) \in GL(\mathbb{C},2)$

... oder ... wie auf unvorhergesehene Weise Drehungen im $\mathbb{R}^3$ beschreibbar sind

2x2 Matrizen $A \in SU(2)$

- $\bar{A}^T A = E$ — A ist Unitär (also $A \in U(2)$)
- $\det(A) = 1$ — (also $A \in SU(2)$)

In anderen Worten

$A^{-1} = \bar{A}^T$ oder $\begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix}$, $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Welche Matrizen sind das

$$A = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

$r, s, t, u \in \mathbb{C}$

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det(A)}}_{\substack{\parallel \\ 1 \text{ wg. } A \in SU(2)}} \begin{pmatrix} u & -s \\ -t & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r} & \bar{t} \\ \bar{s} & \bar{u} \end{pmatrix} = \bar{A}^T$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} u = \bar{r} \\ t = -\bar{s} \end{array}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} r & s \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix} \text{ mit } \det(A) = |r|^2 + |s|^2 = 1}$$

Bem: $SU(2)$ ist zusammenhängend

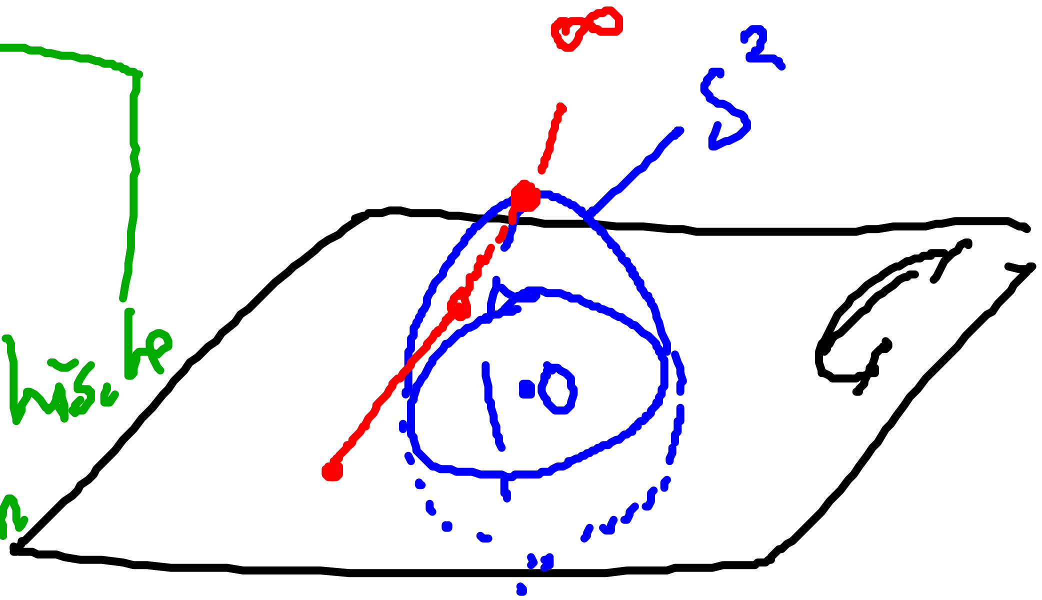
Bem
$\mathrm{Re}(r)^2 + \mathrm{Im}(r)^2 + \mathrm{Re}(s)^2 + \mathrm{Im}(s)^2 = 1$
$SU(2) \sim S^3$

Viele Räume:

- $\mathbb{C}^2$: Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$
- $\mathbb{CP}^1 := \{ [v] \mid v \in \mathbb{C}^3 - \{0\} \}$ $\quad [v] = \{ \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \}$

  Menge der 1-dimensionalen ℝ in $\mathbb{C}^2$
- $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ein Punkt kompaktifizierung der komplexen Zahlenebene
- S^2 Kugeloberfläche in 3D $\quad S^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$

$\hat{\mathbb{C}} \sim S^2$ über stereographische Projektion



$\hat{\mathbb{C}} \sim \mathbb{CP}^1 \qquad \left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] \sim \frac{a}{b}$

$\omega \sim \left[\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$\infty \sim \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$SU(2)$ operiert auf $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{CP}^1$, $\hat{\mathbb{C}}$, S^2

$$A = \begin{pmatrix} r & s \\ -\bar{s} & \bar{r} \end{pmatrix}$$

- $v \in \mathbb{C}^3 \qquad v \mapsto A \cdot v$
- $[v] \in \mathbb{CP}^1 \qquad [v] \mapsto [Av]$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad A \cdot v = \begin{pmatrix} ra + sb \\ -\bar{s}a + \bar{r}b \end{pmatrix}$$

- $\omega \in \hat{\mathbb{C}} \qquad \omega \longmapsto \dfrac{r\omega + s}{-\bar{s}\omega + \bar{r}} = f_A(\omega)$

$\omega \neq \infty$ $\qquad$ $-\bar{s}\omega + \bar{r} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\omega + s \\ -\bar{s}\omega + \bar{r} \end{pmatrix}$$

Einige Fakten

- $f_A(\omega)$ ist bijektiv
- $f_A(f_B(\omega)) = f_{A \cdot B}(\omega)$
- $f_A(\omega) = f_{-A}(\omega)$

$A \in SU(2)$ bildet $\hat{\mathbb{C}}$ bijektiv auf $\hat{\mathbb{C}}$ ab.

Fixpunkte von $A \in SU(2)$, λ ein EW von A

$Av = \lambda v$ für zug. Eigenvektor

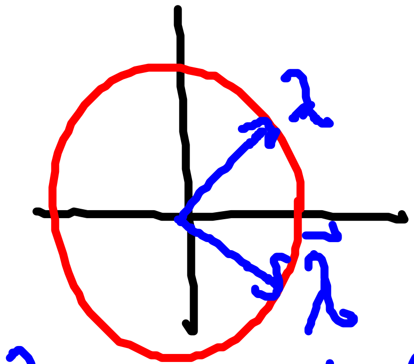
- Bem 1: $|\lambda| = 1$

Bew $\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \cdot \bar{\lambda} \cdot \langle v, v \rangle = |\lambda|^2 \cdot \|v\|^2$ ($|\lambda|^2 = 1$)

$\|Av\| = \langle Av, Av \rangle = v^T \underbrace{A^T \bar{A}}_{1} \bar{v} = v^T \bar{v} = \|v\|^2$

- Bem 2: ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ EW von A, so ist $\bar{\lambda}$ EW von A

Bew $1 = \det(A) = \underbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2}_{\text{Prod der EW}}$



- Bem 3: Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ EW und $Av = \lambda v$ und $Aw = \bar{\lambda} w$ $\Rightarrow v \perp w$

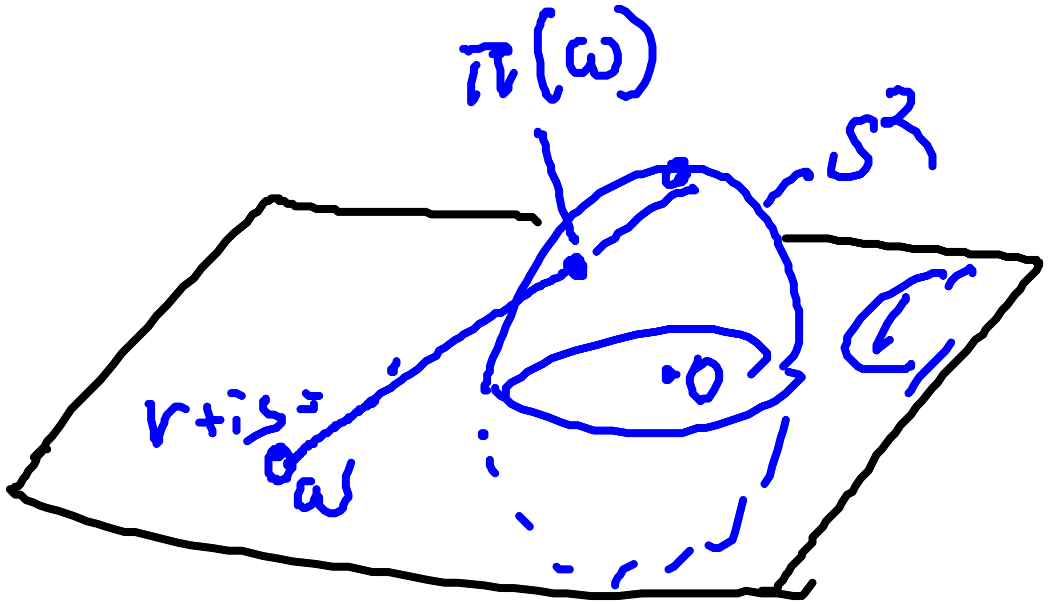
$\langle \lambda v, \bar{\lambda} w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$

$\underset{\neq 1}{\lambda^2} \langle v, w \rangle$

$\Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

SU(2) operiert auf S^2

$\hat{\mathbb{C}} \sim S^2$ über Stereographische Proj



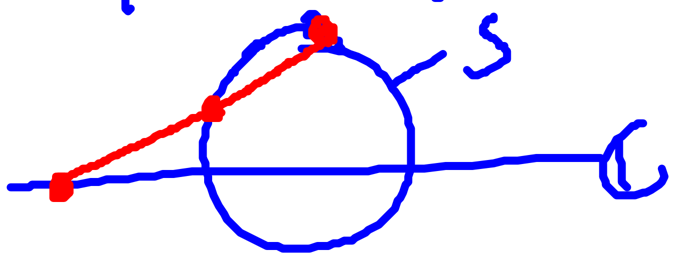
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} (x+iy)\cdot\frac{1}{1-z} \sim \begin{pmatrix} x+iy \\ 1-z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 =: P$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} (-x-iy)\frac{1}{1+z} \sim \begin{pmatrix} -x-iy \\ 1+z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 =: Q$$

$\pi : \hat{\mathbb{C}} \to S^2$

$\omega = r + is$

$$\pi(\omega) = \frac{1}{|\omega|^2+1}\begin{pmatrix} 2r \\ 2s \\ |\omega|^2-1 \end{pmatrix}$$



$\pi^{-1} : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$

$$\pi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+iy)\cdot\frac{1}{1-z}$$

$$\langle P, Q\rangle = P^T\overline{Q}$$

$$= (x+iy)(-x+iy) + (1-z)(1+z)$$

$$= \underbrace{-x^2-y^2-z^2}_{-1}+1 = 0 \Rightarrow P \perp Q$$

$$A = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2+b^2+c^2+d^2=1$$

Diese läßt auf S^2 antipodale Punkte fest

Erstaunliche Tatsache:

- Fixpunkte hängen nur von c, d, b ab
- A beschreibt Drehung von S^2
  Drehwinkel hängt nur von a ab.