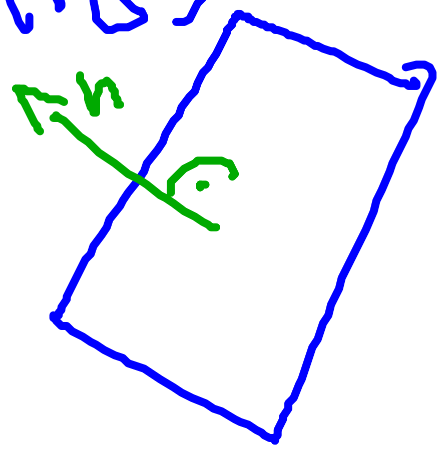
Satz: letzte Woche: Jede Hyperebenspiegelung hat die Form: $E - 2nn^T$

Normale zur Spiegelungsebene

Def: S ist Spiegelung wenn

$$S \in O(n), \quad S^2 = E, \quad S \neq E$$

Hyperebenspiegelung $\dim(F_S) = n-1$



Satz: Sei $\|n\| = 1$ dann ist
$E - 2nn^T$ eine Hyperebenenspiegelung

<u>Bew</u>: • $(E-2nn^T)^2 = (E-2nn^T)\cdot(E-2nn^T)$

$= E\cdot E - 2nn^T\cdot E - E\,2\cdot nn^T + 4n\underbrace{n^T n}_{=1}n^T$

$= E - 4nn^T + 4nn^T = E$

• $\underbrace{(E-2nn^T)}_{S}{}^T = E^T - (2nn^T)^T = E - 2nn^T$

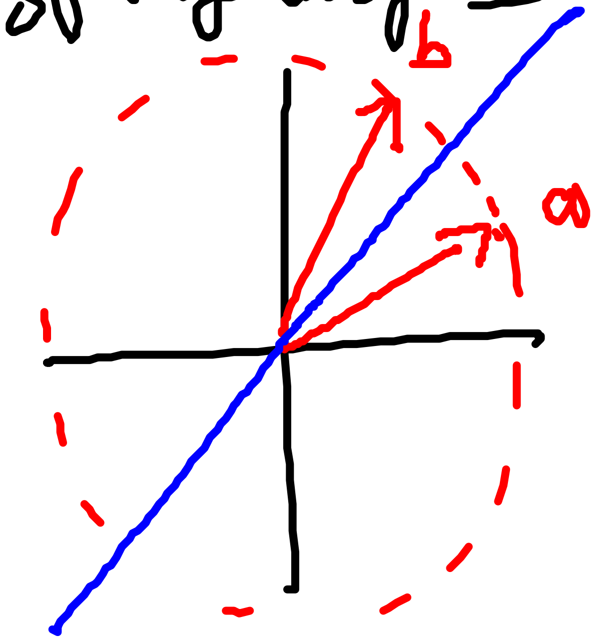
$S^T\cdot S = S^2 = E \Rightarrow S \in O(n)$

• Sei $a \in \operatorname{span}(n)^\perp$

$Sa = (E-2nn^T)a = Ea - 2n\underbrace{n^T a}_{0} = a$

$\Rightarrow a \in F_S \overset{n \notin F_S}{\Longrightarrow} \operatorname{span}(n)^\perp = F_S$

Satz Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = \|b\| = 1$, $a \neq b$.
Dann ex. genau eine Hyperebenenspiegelung S mit $S \cdot a = b$ und $S \cdot b = a$



Bew Sei $n = \frac{a-b}{\|a-b\|}$

und $S = E - 2nn^T$

$$Sa = Ea - 2\frac{1}{\|a-b\|^2}(a-b)(a-b)^T \cdot a$$

$$= a - 2\frac{1}{\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a,b\rangle} \cdot (a-b) \cdot (a^T a - b^T a)$$

$$= a - \frac{1}{1 - \langle a,b\rangle} \cdot (a-b)(1 - \langle a,b\rangle) = a - (a-b) = b$$

wg. $S^2 = E$ folgt auch $Sb = a$

Satz: Jede Orthogonale Transfm $T \neq E$ im $\mathbb{R}^n$ ist Produkt von höchstens n Hyperebenen Spiegelungen

Bew durch vollst. Ind. über n

- $n=1$ trivial
- Sei $n>1$ Sei oBdA $T \cdot e_1 \neq e_1$

Sei S die Ebenenspiegelung die e_1 und $T^{-1} \cdot e_1$ vertauscht

Betrachte $T \cdot S$ Wir haben $T \cdot (S \cdot e_1) = T \cdot (T^{-1} \cdot e_1) = E \cdot e_1 = e_1$

$$\Rightarrow T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ 0 & \boxed{T'} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$T' \in O(n-1)$

$\Rightarrow T' = S_1' \cdot \ldots \cdot S_k'$ $k \leq n-1$

Setze $S_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{S_i'} \\ 0 & \end{pmatrix}$ Ebenenspiegelung

$T = S_1 \cdot \ldots \cdot S_k \cdot S$

Satz: Sei S eine Hyperebenenspiegelung im $\mathbb{R}^d$
$\Rightarrow \det(S) = -1$

Bew Sei n der Normalenvektor und
$n, a_1, \ldots, a_{d-1}$ eine ONB des $\mathbb{R}^d$

$S \cdot n = -n$; $S \cdot a_i = a_i$ für alle i

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{d-1} \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$M = T^T \cdot S\, T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = -1$$

$\Rightarrow \det(S) = -1$

Satz Jede Drehmatrix in $SO(3)$ ist Produkt zweier Spiegelungen.

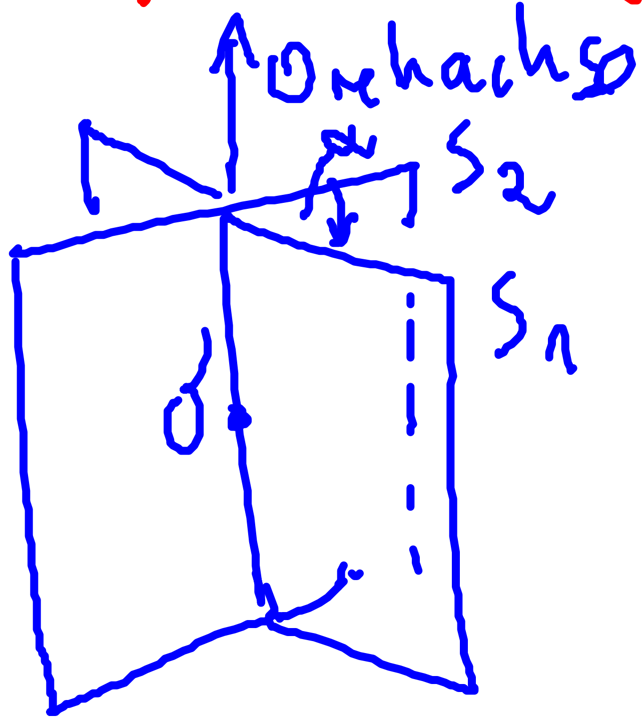
Bew Sei $E \neq A \in SO(3) \Rightarrow A$ ist Produkt von k, $k \leq 3$ Spiegelungen

Für $k=1$, $k=3$ ergibt sich $\det(A) = -1$

$\Rightarrow$ A ist Produkt von 2 Spiegelungen.

Falls $A = E$ wähle $A = S \cdot S$ für bel. Spiegelg. S

Bsp



$A = S_1 \cdot S_2$

$\Rightarrow$ Drehachse ist Schnitt der Spiegelebenen

Drehwinkel ist 2α

2.5 Eigenwerte von Spiegelungen und Drehungen

Sei $A \in O(n) \Rightarrow$ Für alle EW λ von A gilt $|\lambda| = 1$

$\Rightarrow |\det(A)| = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

Spiegelungen: $S^2 = E$

Satz Sei λ EW von $S \Rightarrow \lambda = \pm 1$

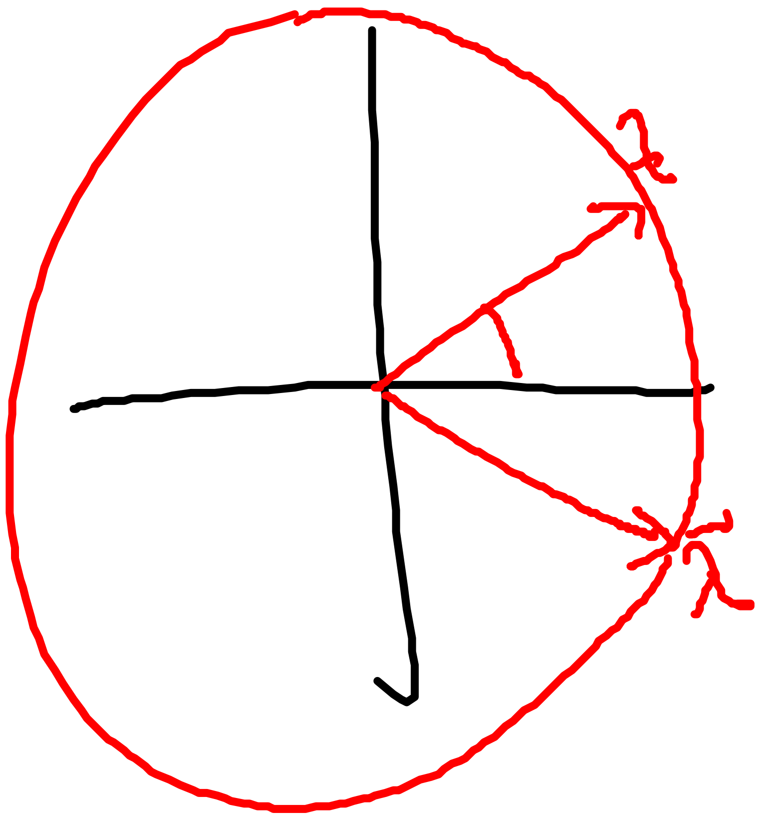
Bew $Sv = \lambda v$ für $v \neq 0$

$\Rightarrow \underline{v} = S^2 v = \underline{\lambda^2 v} \Rightarrow \lambda^2 = 1$

Eigenwerte von Drehungen:

Sei $A \in SO(2)$, $|\lambda| = 1$ für jeden EW

Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein EW so ist auch $\bar{\lambda}$ EW



Bsp $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$P_A = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\alpha)^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + \lambda^2 + (\sin\alpha)^2$$

$$= \lambda^2 - 2\cos\alpha\,\lambda + 1$$

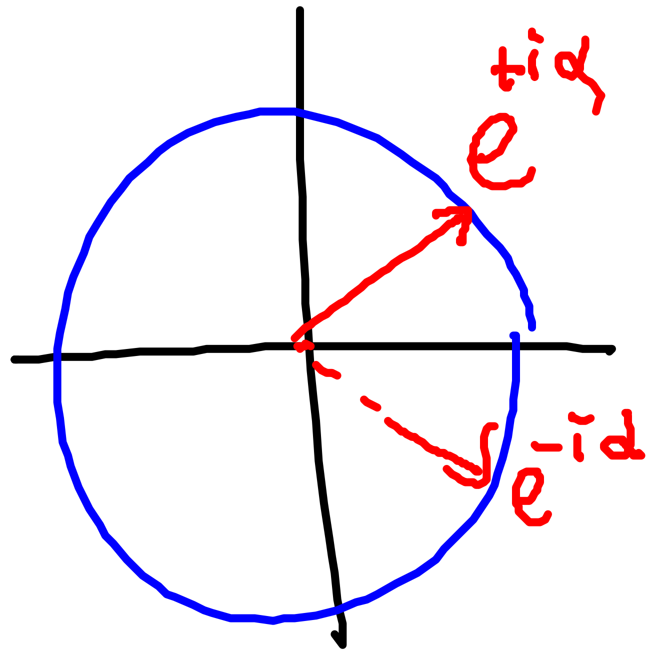
$$\lambda_{1/2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos\alpha^2 - 1}$$

$$\lambda_{1/2} = \cos\alpha \pm \sqrt{(\cos\alpha)^2 - 1}$$

$$= \cos\alpha \pm i\sqrt{1-(\cos\alpha)^2}$$

$$= \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

$$= \underline{\underline{e^{\pm i\alpha}}}$$



$\Rightarrow$ Man kann aus EW von A den Betrag des Drehwinkels ablesen!