Kurze Wiederholung:

Orthogonale Transformation: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (lin. Transform.) $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle$

Bew. $\langle Ax, Ay\rangle = x^T \underbrace{A^T A}_{E} y = \langle x, y\rangle$

$\Rightarrow$ Erhalten Längen und Winkel.

$\Rightarrow$ Führen ONB in ONB über

$\Rightarrow$ $f(x) = A \cdot x$ dass dann $\underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{ONB} = A$

$\Rightarrow$ $A^{-1} = A^T$

$\underbrace{\begin{pmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -v_n- \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{A} = E$

Über $\mathbb{C}^n$

Orth. Trans.

$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$

$\Leftrightarrow$

$A^{-1} = \bar{A}^T$

Kurze Wiederholung TI:

Im $\mathbb{R}^2$ Orth. Transfm: $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{Drehung}}$ oder $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung}}$

Im $\mathbb{R}^3$ $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_z(\alpha)}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{T_y(\alpha)}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{T_x(\alpha)}$

... und viele Mehr

Eigenwerte und Eigenvektoren von Orthogonalen Matr.

Zur Erinnerung:

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $\lambda \in \mathbb{K}$

λ heißt Eigenwert von A wenn

$A v = \lambda v$ für ein $v \neq 0$

v heißt dann zu λ gehörigen Eigenvektor

Berechnung von Eigenwerten:

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ charakteristische Polynom

Eigenwerte sind die Nullstellen von $p_A(\lambda)$

Also: Seien $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von $p_A(\lambda)$
(vielfache Nullstellen tauchen entsprechend oft auf)

dann ist $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich:

$$p_A(0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

$$p_A(0) = \det(A - 0 \cdot E) = \det(A)$$

<u>Satz</u> $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Sei A eine orthogonale Matrix:

Spalten einer orthogonalen Matrix bilden Orthonormalbasis

<u>Satz</u> alle Eigenwerte $\in \mathbb{C}$ von A haben Betrag 1.

<u>Bew</u>: Sei $A\cdot v = \lambda \cdot v$ für $\lambda \neq 0$

$$|\lambda|\cdot\|v\| = \|\lambda\cdot v\| = \|A\cdot v\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1$$

<u>Satz</u> Sei A eine orthogonale 3×3 Matrix (über $\mathbb{R}$) mit $\det(A) = 1 \Rightarrow$ Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $Av = v$

<u>Bew</u>: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A (d.h. $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$)

$\Rightarrow 1 = \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ Fall 1 $\lambda_1 \cdots \lambda_3$ reell $\Rightarrow$ mindest ein $\lambda_i = +1$ da $|\lambda_j| = 1$ für $j = 1..3$

Fall 2 oBdA λ_1 komplex, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = 1$

Satz Sei $A \in O(3)$ mit $\det(A) = 1$ (d.h. $A \in SO(3)$)
sei $Ap = p$ für $p \neq 0$. Dann ist A eine Achsendrehung.

Bew Sei p, a, b eine ONB und $T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ p & a & b \\ | & | & | \end{pmatrix}$

$$M = T^T A T, \quad Me_1 = T^T A T e_1 = T^T A p = T^T p = e_1$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & s \\ 0 & t & u \end{pmatrix} \text{ und } \det(M) = \det(T^T A T) = \det(A) = 1$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = T_x(\alpha)$$

$$T_x(\alpha) = T^T A T$$

$$\Rightarrow A = T\, T_x(\alpha)\, T^T$$

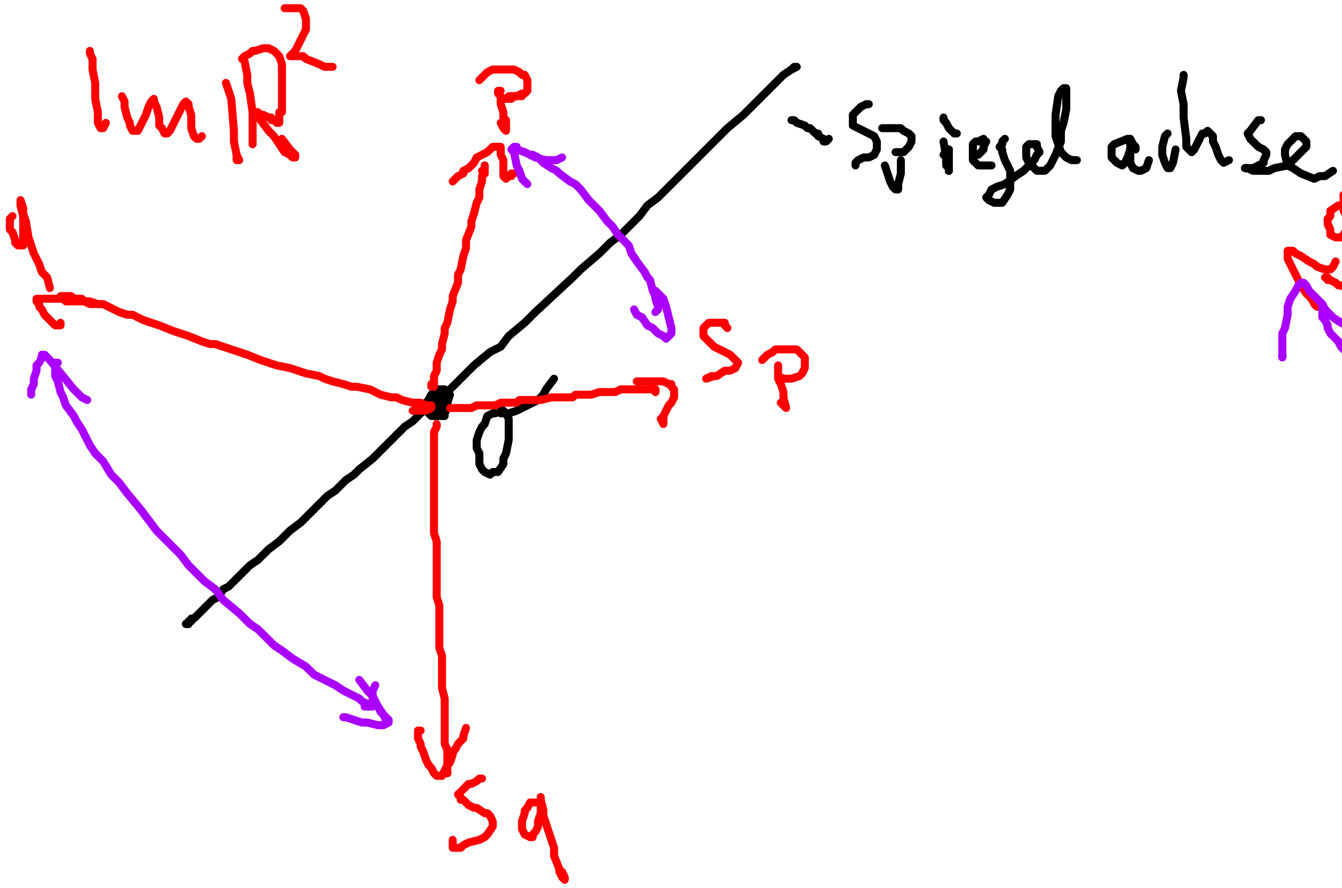
Achsendrehung

Satz vom Fußball

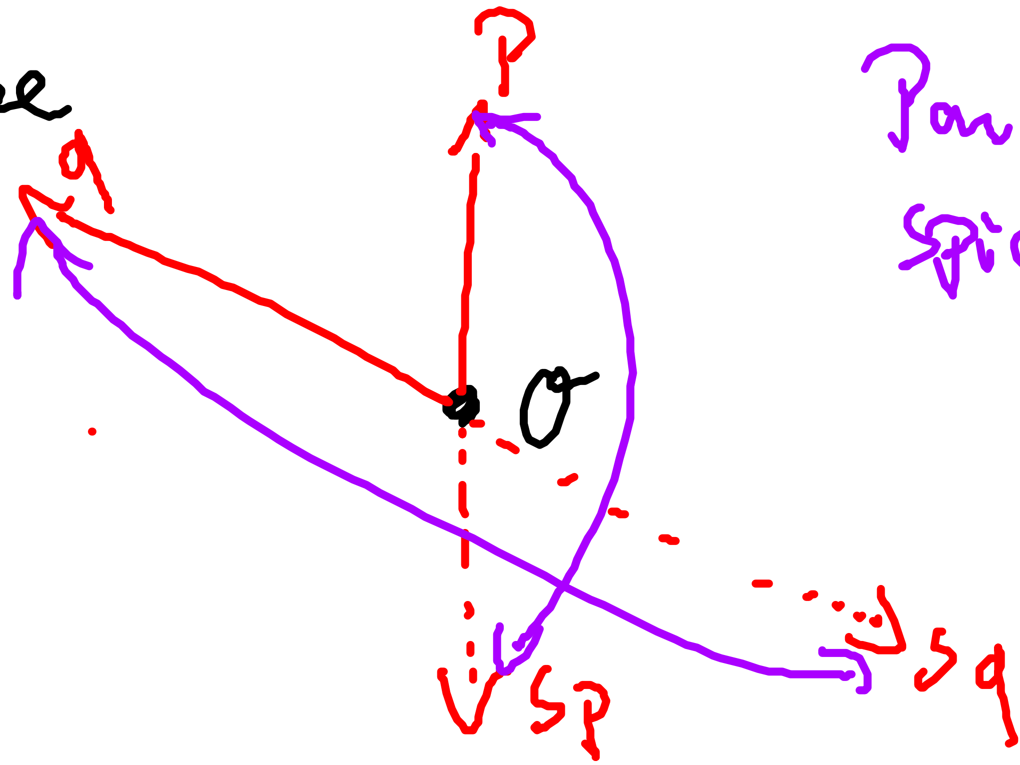
Beim Anstoß in der 2. Halbzeit gibt es einen Punkt des Balles der an der gleichen Stelle liegt wie beim Anstoß der 1. Halbzeit

2.4. Spiegelungen

<u>Def:</u> Eine orthogonale Abb. $S \neq E$ mit $S^2 = E$ heißt Spiegelung



Geradenspiegelung



Punktspiegelung

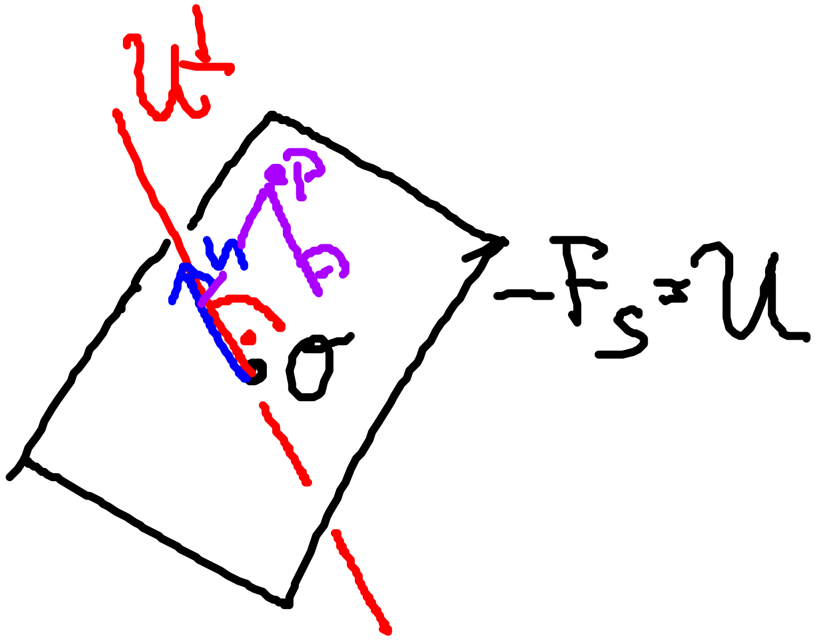
Def Sei S eine Spiegelung. Die Menge $F_S = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Sv = v\}$ heißt Fixraum von S.

Bem: F_S ist Vektorraum. $F_S = \mathrm{Kern}(S - E)$

Def S heißt Hyperebenenspiegelung wenn

$\dim(F_S) = n-1$.

Sei $S \in O(n)$ eine Hyperebenspiegelung $F_S = U$



Sei $U^\perp = \operatorname{span}(n)$ $\quad \|n\| = 1$

Dann gilt: $S \cdot n = \pm n$

da S orthogonal

$\Rightarrow S \cdot n = -n$ wg $S \neq E$

$$S \cdot p = S \cdot \Big(\overset{U^\perp}{\underset{\text{wird gespiegelt}}{\langle p, n \rangle n}} + \overset{U}{\underset{\text{Bleibt fix}}{p'}} \Big) = -\langle p, n \rangle n + \underbrace{p'}_{p - \langle p, n \rangle n}$$

$$S \cdot p = -\langle p, n \rangle n + p - \langle p, n \rangle n = p - 2 \cdot \langle p, n \rangle \cdot n$$

$$= p - 2n \cdot \langle n, p \rangle = p - 2 \cdot n n^T \cdot p = \left(E - 2 \cdot n \cdot n^T \right) \cdot p$$

Satz: Jede Hyperebenensp. S hat die Form $E - 2 n \cdot n^T$