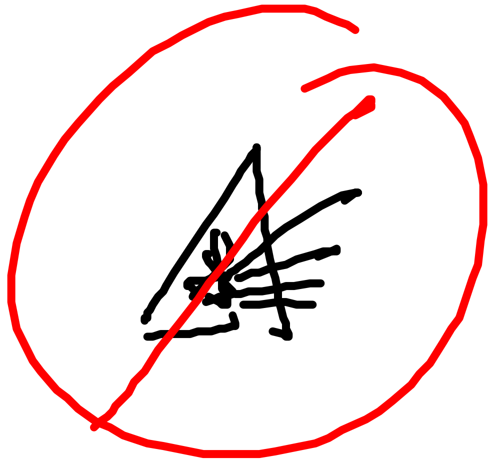
2 Matrizengruppen



2.1 Drehungen und Spiegelungen

Sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung

Def: f heißt orthogonale Transformation wenn für alle $v,w \in \mathbb{R}^n$ $\langle v,w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle$

Bem: Jede orthogonale Transform. erhält Längen + Winkel

Bew: Länge $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\langle f(v),f(v)\rangle} = \|f(v)\|$

Winkel $\cos\alpha_{v,w} = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} = \dfrac{\langle f(v),f(w)\rangle}{\|f(v)\|\cdot\|f(w)\|} = \cos\alpha_{f(v),f(w)}$

Satz: Sei A Matrix einen Transformation mit $\|A \cdot v\| = \|v\|$ dann ist A eine orthogonale Tfm.

Bew: Es gilt

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

Also legt die Norm von x, y, $x+y$ das Skalarprodukt fest

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle$$

Matrix einer orthogonalen Transformation

$f(v) = A \cdot v \quad v \in \mathbb{R}^n \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad A$ ist $n \times n$ Matrix

$$\left.\begin{array}{l} \langle v, w \rangle = v^T w = v^T E_n w \\ \quad \shortparallel \\ \langle Av, Aw \rangle = (Av)^T (Aw) = v^T A^T A w \end{array}\right\} \Rightarrow A^T A = E_n$$

Satz A ist orthogonale Tfm. g.d.w. $A^T = A^{-1}$

A heißt dann Orthogonale Matrix.

Satz Sei A eine orthogonale Matrix, dann bilden die Spalten (Zeilen) von A eine ONB des $\mathbb{R}^n$.

Bew Sei $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$E = A^T A = \begin{pmatrix} \overset{=1}{\langle v_1 v_1\rangle} & \dots & \langle v_n v_1\rangle \\ \langle v_1 v_2\rangle & \dots & \vdots \\ \overset{\text{"}0\text{"}}{\vdots} & & \vdots \\ \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\langle v_1 v_n\rangle} & \dots & \overset{=1}{\langle v_n v_n\rangle} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Bem aus $\det(A) = \det(A^T)$ folgt bei orthogonalen Matrizen

$$\det(A) = \pm 1 \quad \begin{cases} \det(A) = 1 & \text{orientierungserhaltend} \quad \mathbb{R}^3 \text{ Drehungen} \\ \det(A) = -1 & \text{" umkehrend} \quad \mathbb{R}^3 \text{ Spiegelungen} \end{cases}$$

Unitäre Transformationen

Def $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ linear, heißt unitär wenn

$$\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle \text{ für alle } v, w \in \mathbb{C}^n$$

komplexes Skalarprodukt.

$$\langle v, w\rangle = v^T \overline{w} = v^T E \overline{w}$$

$$\langle Av, Aw\rangle = (Av)^T (\overline{Aw}) = v^T A^T \overline{A}\,\overline{w}$$

$$\Rightarrow A^T \overline{A} = E$$

$$\begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \overline{v_1} & \cdots & \overline{v_n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\ \rangle & & \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ & & \langle\ \rangle \end{pmatrix} = E_n$$

$\Rightarrow v_1 \ldots v_n$ ist ONB des $\mathbb{C}^n$

2.2. Diverse Matrizengruppen.

$GL(n,K) := \{A \mid A \text{ ist } n\times n \text{ Matrix über } K \text{ mit } \det(A)\neq 0\}$ general linear

$SL(n,K) := \{A \in GL(n,K) \mid \det(A) = 1\}$ special linear

$O(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$ orthogonal

$SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ special orthogonal

$U(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \bar{A}^T\}$ unitary

$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$ special unitary

$\vdots$

... das alles sind Gruppen

Beispiel: „$O(n)$ ist Gruppe"

Sei $A, B \in O(n)$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$

$\Rightarrow A \cdot B \in O(n)$ (Abgeschlossenheit)

E_n (neutrales Element)

Inverses:

Sei $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} = A^T$

$\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T = (A^{-1})^T \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$

(Inverses)

2.3 Dreh und Spiegelungs Matrizen $\mathbb{R}^1 \dots \mathbb{R}^3$

Zur Erinnerung: Sei A eine orthogonale Matrix $\det(A) = \pm 1$

$n=1$: Einzigen Orthogonalmatrizen (1), (-1)

Identität, Spiegelung an 0

$n=2$ $\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{\text{"}\det = 1\text{"}}$ oder $\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}_{\text{"}\det = -1\text{"}}$ mit $a^2+b^2=1$

Begründung: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

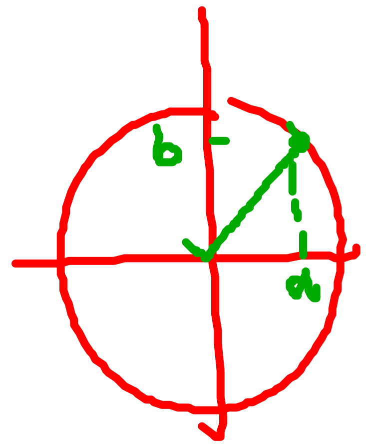
$$\frac{1}{\underbrace{\det(..)}_{=\pm 1}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\underline{n=2}$:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

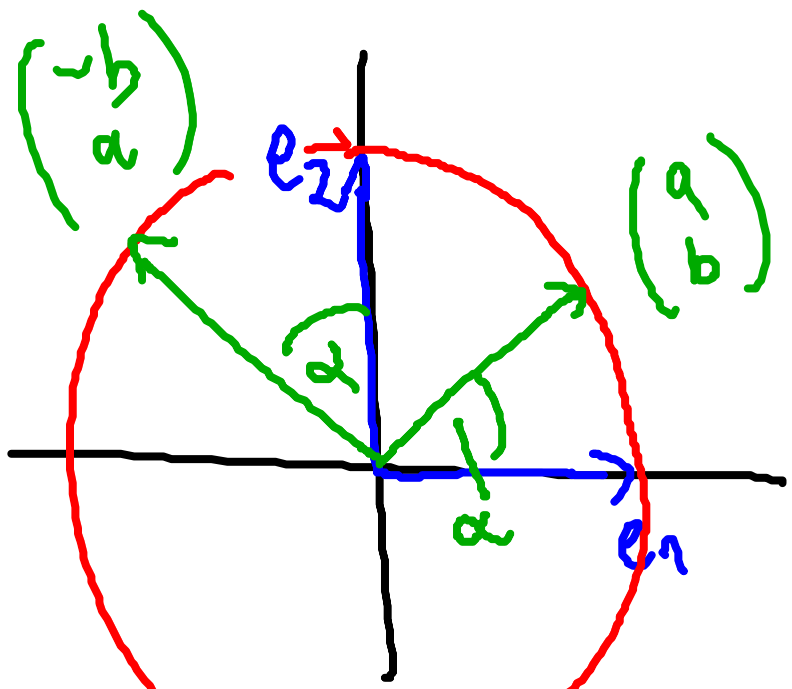
$a^2+b^2=1$

$\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2=1$

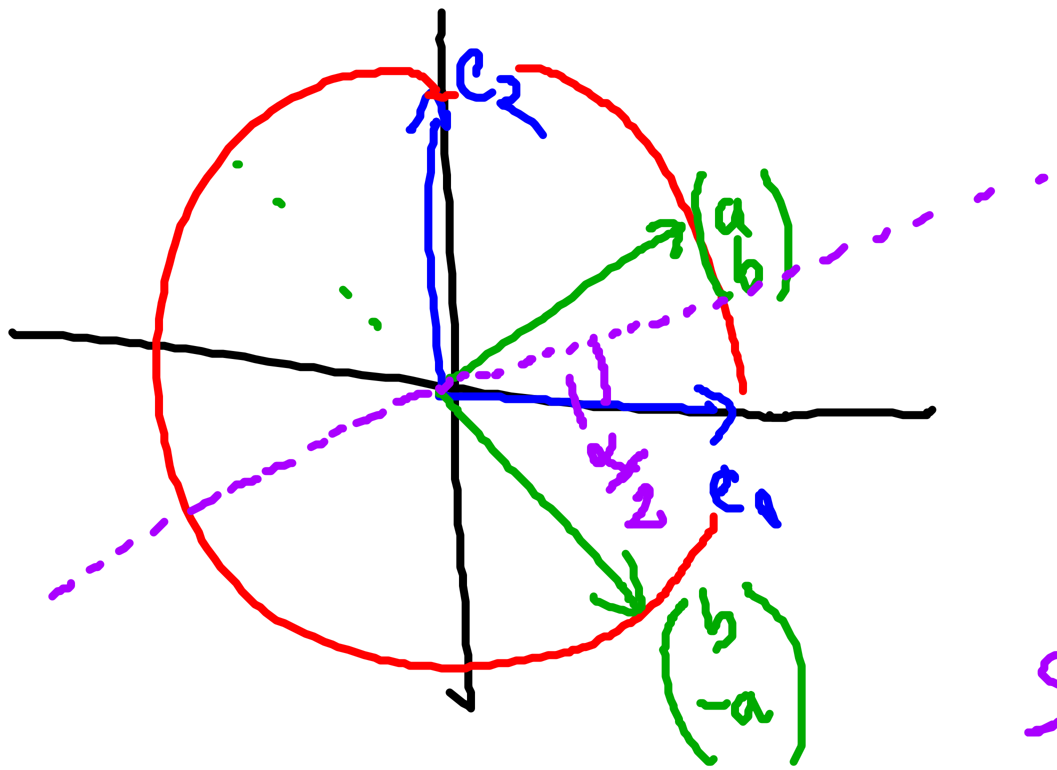


$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$\det = 1$ $\qquad$ $\det = -1$



Drehung



Spiegelung

$\underline{n=3}$

Achsen Drehungen:

x-Achse

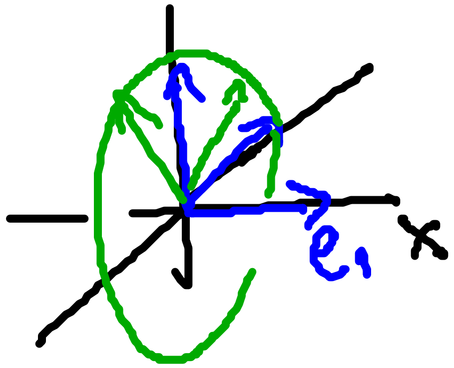
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = T_x(\alpha)$$

y-Achse

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} = T_y(\alpha)$$

z-Achse

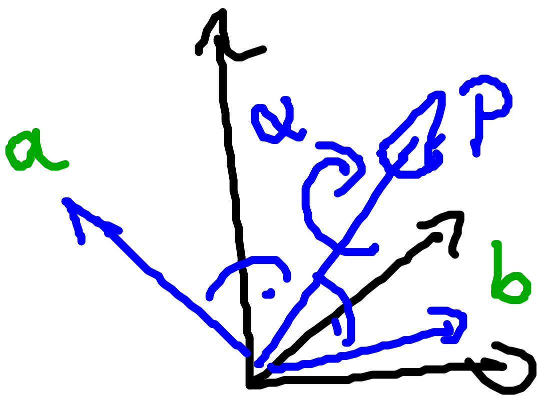
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T_z(\alpha)$$



Satz: Jede „Drehmatrix" im $\mathbb{R}^3$ läßt sich schreiben als $T_x(\alpha)\cdot T_y(\beta)\cdot T_z(\gamma)$

Def $A \in SO(3)$ heißt Drehmatrix.

Drehung um konkrete Achse:



$p \in \mathbb{R}^3$ mit $\|p\|=1$, und Winkel α

Schritt 1: bestimme eine ONB die p enthält.

sei q irgendein Vektor linear unabh. zu p

Setze $a' = p \times q$ und $a = \frac{a'}{\|a'\|}$ $\quad \boxed{a \perp p}$

Setze $b' = p \times a$ und $b = \frac{b'}{\|b'\|}$ $\quad \boxed{b \perp p,\ b \perp a}$

Gesucht Abb: $p \mapsto p$; $a \mapsto \cos\alpha\, a + \sin\alpha\, b$

$b \mapsto -\sin\alpha\, a + \cos\alpha\, b$

Sei $T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ p & a & b \\ | & | & | \end{pmatrix}$ $\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} - & p & - \\ - & a & - \\ - & b & - \end{pmatrix}$, $T^{-1} = T^T$

$$\boxed{T_{p,\alpha} = T \cdot T_{x(\alpha)} \cdot T^T}$$