Letzte Stunde: Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Wichtige Tatsache $a \perp a \times b$ und $b \perp a \times b$

In anderen Worten: $a \times b$ ist Lösung von

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sind a, b linear unabh.

So ist $a \times b \neq 0$ und

aus $\underbrace{\operatorname{Kern}(A)}_{\text{1-dimensional}}$

Zusammenhang mit Cramerschen Regel:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad \mu = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} & + & y \cdot \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} & + & z \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \lambda & & \mu & & 1 & & \end{array}$$

$$\Big\downarrow \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\uparrow$$

$$(a \times b)^T$$

Im $\mathbb{R}^n$ gegeben $n-1$ Vektoren $a_1, \dots, a_{n-1}$

gesucht ist b mit $b \perp a_i$ für $i = 1, \dots, (n-1)$

löse $\begin{pmatrix} — a_1 — \\ \vdots \\ — a_{n-1} — \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ b \\ | \end{pmatrix} = 0$

$$b = \left(\begin{vmatrix} \ \ \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \ \ \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \ \ \end{vmatrix},\ \dots\dots,\ \pm\begin{vmatrix} \ \ \end{vmatrix} \right)$$

i-ter eintrag

ist det von A mit i-ter Spalte weggenommen

$n=2 \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$(a_1 \ a_2) \mapsto (a_2, -a_1) = p \perp a$

$n=3 \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \right) = a \times b$$

$n=4 \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \cdot & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}} & \cdot & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} & \cdot & \boxed{\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}} & \cdot \end{vmatrix} \right)$$

Noch ein kleinen nützlichen Trick:

Orthogonalbasen die einen bestimmten Vektor p enthalten.

$\mathbb{R}^2$: $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$: $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, $r = p \times q$

Für Orthonormalbasis nachträglich normieren.

1.8 Skalarprodukte über $\mathbb{C}^n$

Zur Erinnerung: (i) symmetrisch
(ii) bi-linear
(iii) positiv-definit $\langle v,v\rangle \geq 0$
$\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

---

1. Ansatz über $\mathbb{C}^n$ $\quad \langle v,w\rangle = \sum v_i w_i = v^T w$

Problem: das ist zwar symmetrisch, bi-linear aber nicht positiv definit

Betrachte $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot 1 + i\cdot i = 1 - 1 = 0$$

Pos def war wichtig für
- Länge, Norm
- Orthogonales Komplement

Problem in $\mathbb{C}^n$ gibt es keine positiv-definite symmetrischen bi-linearformen.

Betrachte $\mathbb{C}^1$ sei $s(a,b)$ symmetrische bilinearform $a,b \in \mathbb{C}$

Einzige Möglichkeit: $s(a,b) = \lambda \cdot a \cdot b \quad \lambda \in \mathbb{C}$

Positiv definit $s(1,1) = \lambda \cdot 1 > 0 \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$

Dann aber $s(i,i) = \lambda \cdot i^2 = -\lambda < 0$

$\Rightarrow$ nicht pos-definit

1\. Ausweg: lass pos-def fallen

2\. Ausweg: Modifiziere symmetrisch, linear

Sesquilinearformen:

- $s(v+v', w) = s(v,w) + s(v', w)$
- $s(v, w+w') = s(v,w) + s(v,w')$
- $s(\lambda v, w) = \lambda \cdot s(v, w)$
- $s(v, \lambda \cdot w) = \overline{\lambda} \cdot s(v, w)$

s heißt Sesquilinearform.

$\boxed{\text{Hermite}}$

s heißt hermitesch wenn

$$s(v,w) = \overline{s(w,v)}$$

Bem: hermitesch und sesquilinear gehen auf $\mathbb{R}^n$ in symmetrisch und bi-linear über.

Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ $\quad s: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

(i) hermitesch $\quad s(v,w) = \overline{s(w,v)}$

(ii) linear im ersten Argument $\quad$ ((i),(ii) $\Rightarrow$ sesquilinear)

$$s(v+v',w) = s(v,w) + s(v',w)$$

$$s(\lambda \cdot v, w) = \lambda \cdot s(v,w)$$

(iii) positiv definit

$$s(v,v) \geq 0 \quad s(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Satz: (i),(ii) impliziert sesquilinear

Bew: $s(v, w+w') = \overline{s(w+w',v)} = \overline{s(w,v) + s(w',v)} = \overline{s(w,v)} + \overline{s(w',v)} = s(v,w) + s(v,w')$

$s(v, \lambda w) = \overline{s(\lambda w, v)} = \overline{\lambda \cdot s(w,v)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{s(w,v)} = \overline{\lambda} \cdot s(v,w)$

Kanonisches Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

$$\langle v,w\rangle = \sum v_i \overline{w_i} = v^T \overline{w}$$

$$\langle w,v\rangle = w^T \overline{v} = \overline{v}^T w = \overline{v^T \overline{w}} = \overline{\langle v,w\rangle}$$

Insbesondere ist $\langle v,w\rangle$ positiv definit

$$\langle v,v\rangle = v^T \overline{v} = \sum \underbrace{v_i \overline{v_i}}_{} \geq 0$$

komplexes Betragsquadrat vom v_i

$$v_i \overline{v_i} = |v|^2$$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 + i y_1 \\ x_2 + i y_2 \\ \vdots \\ x_n + i y_n \end{pmatrix} \quad x_i \in \mathbb{R}, \; y_i \in \mathbb{R}$$

$$\langle v,v\rangle = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \ldots\ldots x_n^2 + y_n^2$$

Allgemeines Skalarprodukt über $\mathbb{C}^n$

$$s(v,w) = v^T A \overline{w}$$

Hermitesche Matrix

$$A^T = \overline{A}$$

pos def

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$,

Bemerkungen für $\mathbb{C}^n$

Sei $s(v,w)$ eine hermitesche, pos-def Sesquilinearform

- $\|v\|_s = \sqrt{s(v,v)} \in \mathbb{R}^+$ definiert eine Norm
- Die CSU gilt auch hier
- Senkrecht bezügl. s : $v \perp w \Leftrightarrow s(v,w) = 0$
- Orthogonalraumtheorie analog aufbaubar

Orthogonalbasis in $\mathbb{C}^n$

$v_1, \dots, v_d \in \mathbb{C}^n$, $d \le n$ ist ONB

wenn $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ für $i = 1 \dots d$

$\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$

$\overline{A}^T =: A^H =: A^*$

Als Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_d \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

$v_1, \dots, v_d$ ist ONB $\quad \overline{A}^T A = E$

Dann ist $A^{-1} = \overline{A}^T$ (für $n = d$)

Koordinaten $p \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_d)$ bzgl ONB $v_1, \dots, v_d$

$\overline{A}^T p$ Also: $\lambda_1 = \langle p, v_1 \rangle, \dots, \lambda_d = \langle p, v_d \rangle$