Orthonormalbasen. $U = \operatorname{span}(u_1, \dots, u_d)$

$u_1, \dots, u_d$ ist ONB wenn $U = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$

$U^T U = E$

---

**Satz** Seien $u_1, \dots, u_d$ eine ONB dann sind $u_1, \dots, u_d$ linear unabhängig.

**Bew** Sei $u_1, \dots, u_d$ ONB

Sei $0 = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d$ und $i \in \{1, \dots, d\}$

$$0 = \langle 0, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{d} \lambda_j u_j, u_i \right\rangle = \sum \lambda_j \langle u_j, u_i \rangle$$

$$= \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \lambda_i$$

## Senkrechte Projektion

**Satz** Sei $U$ ein Untervektorraum von $V$, $v \in V$ und $u_1 \dots u_d$ eine ONB von $U$.

Dann ist $\langle v, u_1\rangle u_1 + \dots + \langle v, u_d\rangle u_d$ die senkrechte Projektion von $v$ auf $U$.

**Bew** Zu zeigen: mit $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$\underbrace{A^T A}_{E} \cdot \begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_d\rangle \end{pmatrix} = \underbrace{A^T v}_{\begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_d\rangle \end{pmatrix}}$$

(wg. Projektionssatz)

Wie macht man aus einer Basis ein ONB
Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsalgorithmus

Sei $v_1 \ldots v_d$ eine Basis von $U$

1. Wähle $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

2. Wähle $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$, $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$

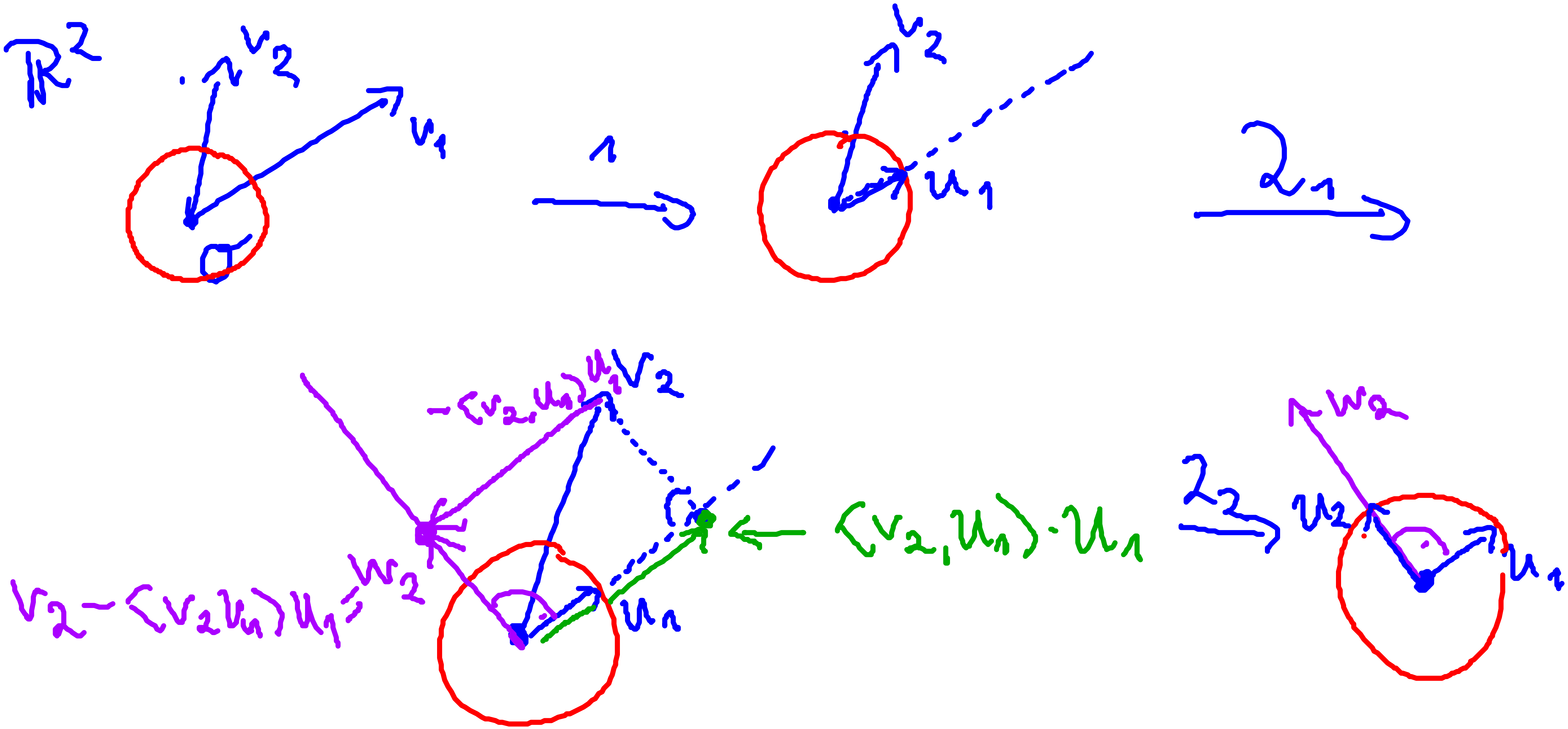
3. Wähle $w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$
$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$

$\vdots$

d.

$u_1 \ldots u_d$ ist ONB für $U$

# Geometrie von Gram-Schmidt



Nachteil: ständiges Normieren → Wurzelzeichen

Alternativ

1. $w_1 = v_1$

2. $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 w_1 \rangle}{\langle w_1 w_1 \rangle} \cdot w_1$

3. $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3 w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 - \frac{\langle v_3 w_2 \rangle}{\langle w_2 w_2 \rangle} \cdot w_2$

$\vdots$

d. ...

Und nun $u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$ ... $u_d = \frac{w_d}{\|w_d\|}$

<u>Satz</u> Jeder Unterraum des $\mathbb{R}^n$ besitzt eine ONB.

---

<u>Allgemein</u>: Jeder Vektorraum mit abzählbarer Basis und Skalarprodukt besitzt eine ONB

# QR-Zerlegung einer Matrix

Sei $v_1 \dots v_d$ Basis von $U$
und $u_1 \dots u_d$ die durch GS erzeugte ONB

Es gilt $v_1 \in \operatorname{span}(u_1)$ $\quad v_1 \perp u_2, v_1 \perp u_3 \dots$

$v_2 \in \operatorname{span}(u_1, u_2)$ $\quad v_2 \perp u_3, v_2 \perp u_4 \dots$

$v_3 \in \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3)$ $\quad v_3 \perp u_4 \dots$

$\vdots$ $\quad (v_i \perp u_j$ für $i < j)$

Also $v_1 = \langle v_1 u_1 \rangle u_1 + \overset{=0}{\langle v_1 u_2 \rangle} u_2 + \dots + \overset{=0}{\langle v_1 u_d \rangle} u_d$

$v_2 = \langle v_2 u_1 \rangle u_1 + \langle v_2 u_2 \rangle u_2 + \overset{=0}{\langle v_2 u_3 \rangle} u_3 \dots \overset{=0}{\langle v_2 u_d \rangle} u_d$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$v_d = \langle v_d, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v_d u_d \rangle u_d$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle v_1, u_1 \rangle & \langle v_2, u_1 \rangle & \cdots & \langle v_d, u_1 \rangle \\ 0 & \langle v_2, u_2 \rangle & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \\ 0 & 0 & & \langle v_d, u_d \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_d \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | & | & | \end{pmatrix}}_{\text{Spalten orthonormal}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & \cdots & | \end{pmatrix}}_{\text{Spalten linear unabh.}}$$

$$Q \cdot R = A$$

Satz jede Matrix $A$ mit linear unabhängigen Spalten ist Produkt einer Orthonormalen Matrix $Q$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R$.

# 1.7 Kreuzprodukt (eine Spezialität des $\mathbb{R}^3$)

$$\_\_\_ \times \_\_\_ \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

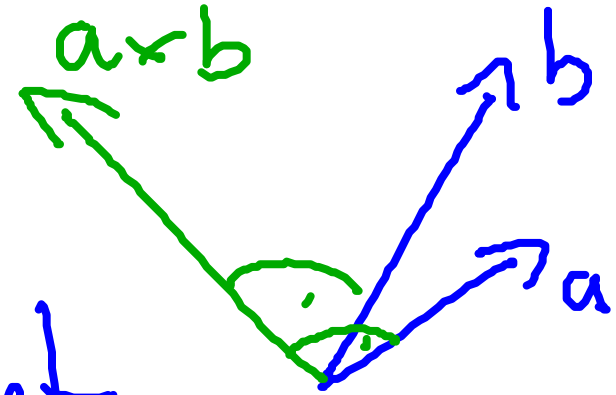
$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \langle a, b \times c \rangle$$

**Satz** $(a\times b)\perp a, \quad (a\times b)\perp b$

**Bew** $\langle a, a\times b\rangle = \det(a, a, b) = 0$

$\langle b, a\times b\rangle = \det(b, a, b) = 0$




**Satz** $a, b$ seien linear unabh. $\Rightarrow$

$a, b, a\times b$ bilden ein Rechtssystem

d.h. $\det(a, b, a\times b) > 0$

**Bew** $\det(a, b, a\times b) = \det(a\times b, a, b) = \langle a\times b, a\times b\rangle = \|a\times b\|^2 \geq 0$

wg $a, b$ lin unabh $a\times b \neq 0$

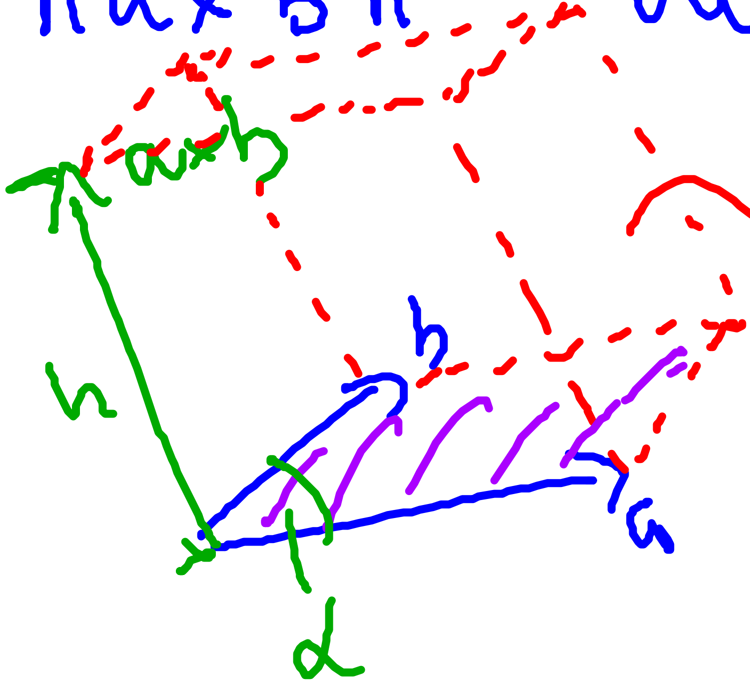
$\Rightarrow \|a\times b\|^2 > 0$

## Weitere Eigenschaften des Kreuzproduktes

- linear in beiden Argumenten
- Antikommutativ $\quad a \times b = -\, b \times a$

---

$$\|a \times b\|^2 = \det(a, b, a \times b)$$




$$V = \det(a, b, a \times b)$$

$$\| $$

$$G \cdot h, \quad h = \|a \times b\|$$

$$G = \|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \, |\sin \alpha|$$

Einige Nützliche Identitäten für das Kreuzprod

- $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2 = \begin{vmatrix} \langle a,a\rangle & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle \end{vmatrix}$

- $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$

- $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$

- $(a \times b) \times (c \times d) = \det(a\, b\, d)\, c - \det(a\, b\, c)\, d$