Kleiner Nachtrag zur Ausgleichs-rechnung

Entscheidende Gleichung

$$A^T A \underline{\underline{x}} = A^T p$$

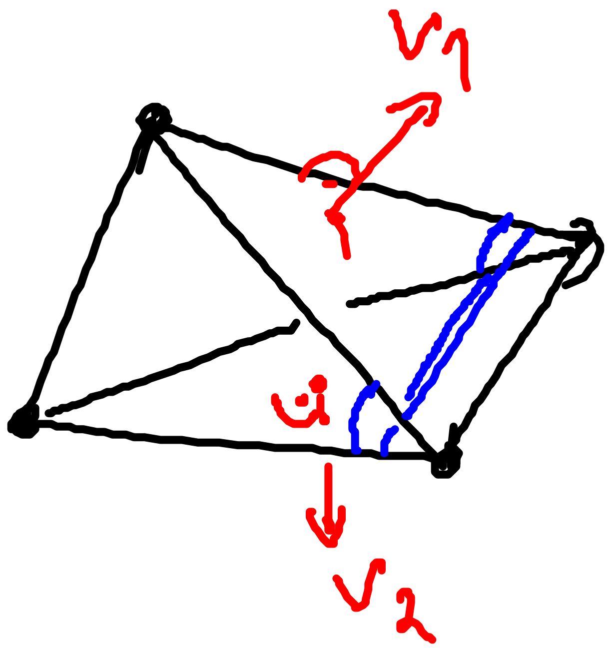
$$x = (A^T A)^{-1} \cdot A^T p$$

ist im Allg rechteckig

$\Downarrow$ das geht leider nicht so

$$\cancel{A^{-1} \underbrace{A^{T^{-1}} \cdot A^T}\, p} \qquad \cancel{A^{-1} \cdot p}$$

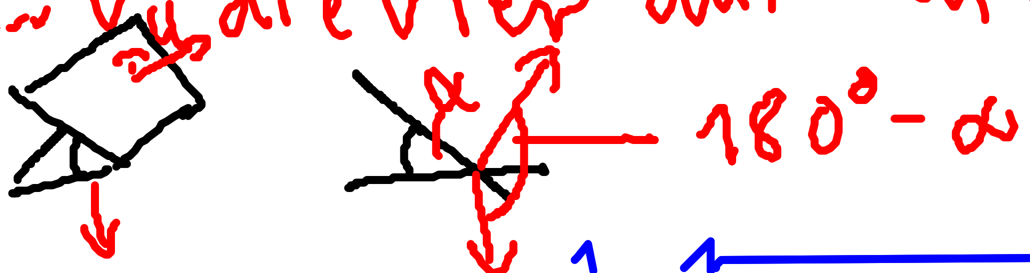
Kanteninnenwinkel bei nicht regulären Tetraedern



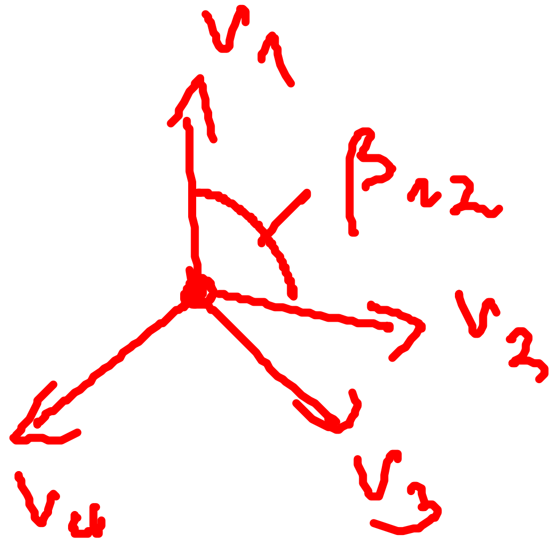
Gesucht: Tetraeder bei denen alle Kanteninnenw. Teiler von 180° sind.
(Motivation, Bau eines Kaleidoskops)

1. Beobachtung: Die Kantenwinkel hängen nur von den Normalenvektoren der Ebenen ab.

Sei $v_1 \dots v_4$ die vier äußeren Normalenvektoren.



Gesucht vier Normalenvektoren $v_1 \ldots v_4$ so daß



1. Nullpunk im Innern
2. Winkel β_{ij} zwischen v_i, v_j erfüllt: $180° - \beta_{ij}$ ist Teiler von $180°$.

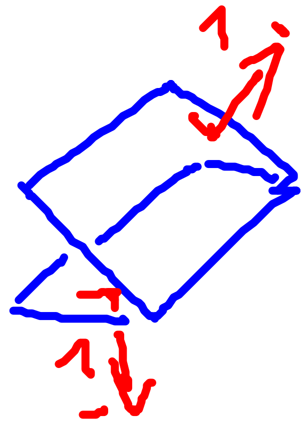
Frage: Wie hängen die sechs Winkel $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{23}, \beta_{24}, \beta_{34}$ zusammen

Beobachtung: β_{12}, β_{23} β_{13} legt bis auf Drehung und Spiegelung die Richtung von v_1, v_2, v_3 fest

Ebenso $\beta_{12}, \beta_{24}, \beta_{14}$ die Richtung von v_1, v_2, v_4 fest

$\Rightarrow$ Für gegebenes $\beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{14}, \beta_{23}, \beta_{24}$ gibt es für β_{34} 2 Möglichkeiten

OBdA sei $\|v_1\| = \dots\dots = \|v_4\| = 1$



Betrachte:

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{matrix}}^{\text{linear abh.}} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} := \langle v_i , v_j \rangle = \cos(\beta_{ij})$$

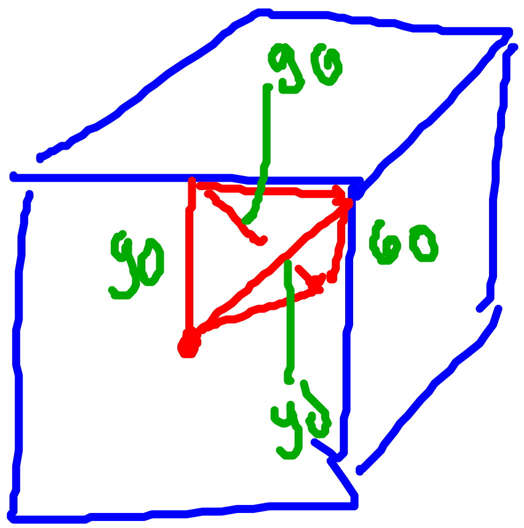
$$= -\cos(\underbrace{\alpha_{ij}}_{\text{Kanteninnenwinkel}})$$

$\Longrightarrow$ $A^T A$ ist nicht invertierbare 4×4 Matrix.

$$\det \begin{pmatrix} \langle v_1 v_1 \rangle & \langle v_1 v_2 \rangle & & \langle v_1 v_4 \rangle \\ \langle v_1 v_2 \rangle & \vdots & & \\ \langle v_1 v_3 \rangle & \vdots & & \\ \langle v_1 v_4 \rangle & & & \langle v_4 , v_4 \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{12} & 1 & c_{23} & c_{24} \\ c_{13} & c_{23} & 1 & c_{34} \\ c_{14} & c_{24} & c_{23} & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Systematisches Durchprobieren mit Mathematika!

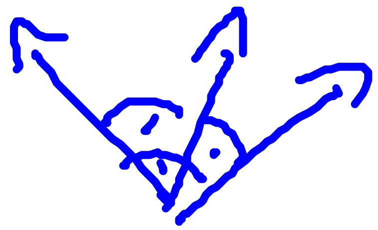
1 2	1 3	1 4	2 3	2 4	3 4
90°	90°	60°	90°	60°	45°
90°	90°	45°	45°	90°	60°
90°	60°	60°	60°	60°	90°



1.6. Orthonormalbasen

Def: Sei U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
Eine Basis $u_1, \dots, u_d$ von U heißt
Orthonormalbasis wenn:
(i) $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ für $i = 1, \dots, d$
(ii) $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ für $i = 1 \dots d;\ j = 1 \dots d,\ i \neq j$

Bem 1: Die Vektoren einer ONB sind normiert (i) und stehen senkrecht aufeinander (ii).



Bem 2: gilt nur (ii) so heißt $u_1 \dots u_d$ eine Orthogonalbasis

__Bem 3__ In einer ONB gilt:

mit $U = \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_d \\ | & & | \end{pmatrix}$ $\quad U^T U = E_d$

__Satz__ Satz sei $v \in U$ dann ist

$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d$ mit $\lambda_i := \langle v, u_i \rangle$

__Bew:__ Die λ_i existieren und sind eindeutig weil $u_1, \dots, u_d$ Basis.

Betrachte $\underline{\underline{\langle v, u_i \rangle}} = \langle \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_d u_d, u_i \rangle$

$= \lambda_1 \langle u_1, u_i \rangle + \dots + \lambda_d \langle u_d, u_i \rangle$

$= \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \underline{\underline{\lambda_i}}$

Bem 4 Sei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ...... $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

die Einheitsbasis des $\mathbb{R}^n$.

$e_1 \dots e_n$ ist ONB.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad v_i = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_i} \right\rangle = \langle v, e_i \rangle$$

$$v = \underline{\underline{v_1}} \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 \dots + \underline{\underline{v_n}} e_n$$