Orthogonalraum

Ausflug

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad x \cdot x + y \cdot y = 0$$

Sei $\mathcal{U}$ ein d-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$

Def: $\mathcal{U}^\perp = \{ w \mid w \perp u \text{ für alle } u \in \mathcal{U} \}$

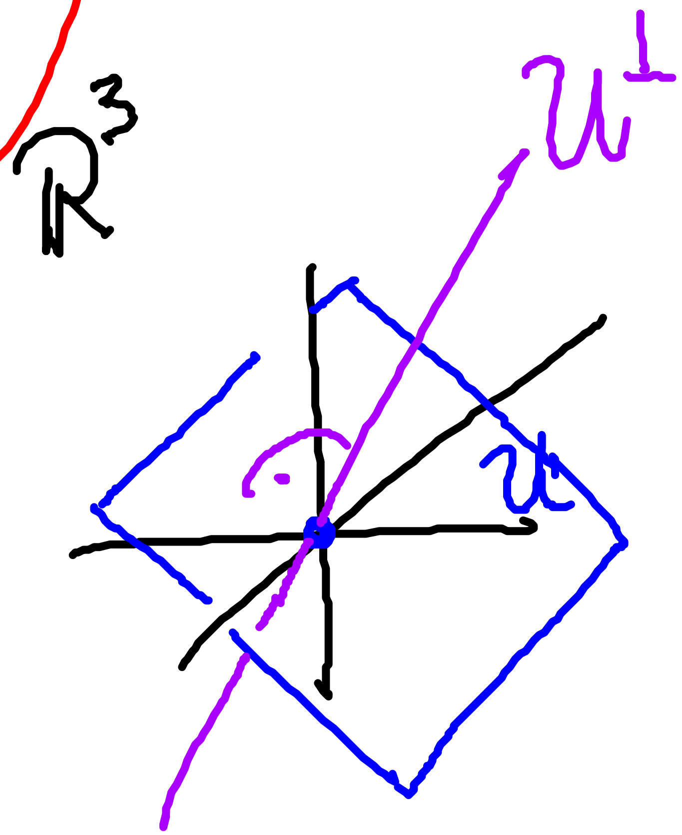
Satz

(i) $\mathcal{U}^\perp$ ist Untervektorraum

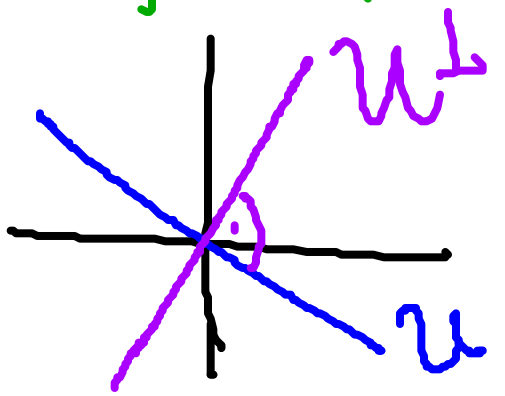
(ii) $\mathcal{U}^\perp \cap \mathcal{U} = \{0\}$

(iii) $\dim \mathcal{U}^\perp = n - d$

(iv) $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$



Beispiel $\mathbb{R}^2$



$\{0\}^\perp = \mathbb{R}^2$

$(\mathbb{R}^2)^\perp = \{0\}$

Sei $v_1 \dots v_d \in \mathbb{R}^n$ und $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_d \\ | & & | \end{pmatrix}$

Hilfssatz: $A^T A$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $v_1 \dots v_d$ linear unabh.

$$A^T A = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \dots & \langle v_d, v_1\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle & & \vdots \\ \vdots & & \\ \langle v_1, v_d\rangle & & \langle v_d, v_d\rangle \end{pmatrix}$$

Bew: "$\Leftarrow$" Sei $v_1 \dots v_d$ lin unabh.

Zeige: $\mathrm{Kern}(A^T A) = \{0\}$

Annahme: $x \in \mathrm{Kern}(A^T A)$; $x \neq 0$

$\Rightarrow A^T A \cdot x = 0 \Rightarrow x^T A^T \cdot A x = 0$

Andererseits: $Ax \neq 0$ (wg lin unabh.)

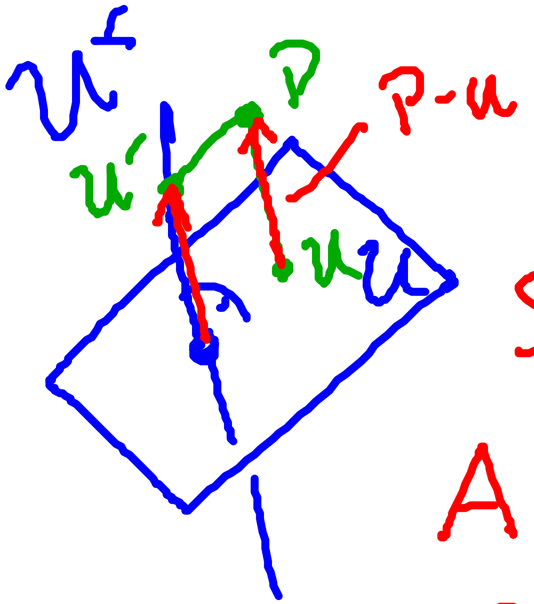
$$Ax = \sum \lambda_i v_i$$

$\Rightarrow 0 \neq \langle Ax, Ax \rangle = x^T A^T A x$

"$\Rightarrow$" Sei $v_1 \dots v_d$ linear abh. $\Rightarrow \exists x \neq 0$ mit $Ax = 0$

$\Rightarrow A^T A x = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Kern}(A^T A) \Rightarrow A^T A$ nicht invertierbar

Projektionssatz: Sei U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ und $p \in \mathbb{R}^n$, dann lässt sich p eindeutig schreiben als $p = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U^\perp$



Bew: Zu zeigen es gibt ein eindeutiges $u \in U$ mit $p - u \in U^\perp$

Sei $v_1 \ldots v_d$ Basis von U und $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_d \\ | & & | \end{pmatrix}$

Ansatz sei $u = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i$ gesucht $\lambda_1 \ldots \lambda_d$.

$\langle v_j, \sum \lambda_i v_i - p \rangle = 0$ für alle $j = 1 \ldots d$

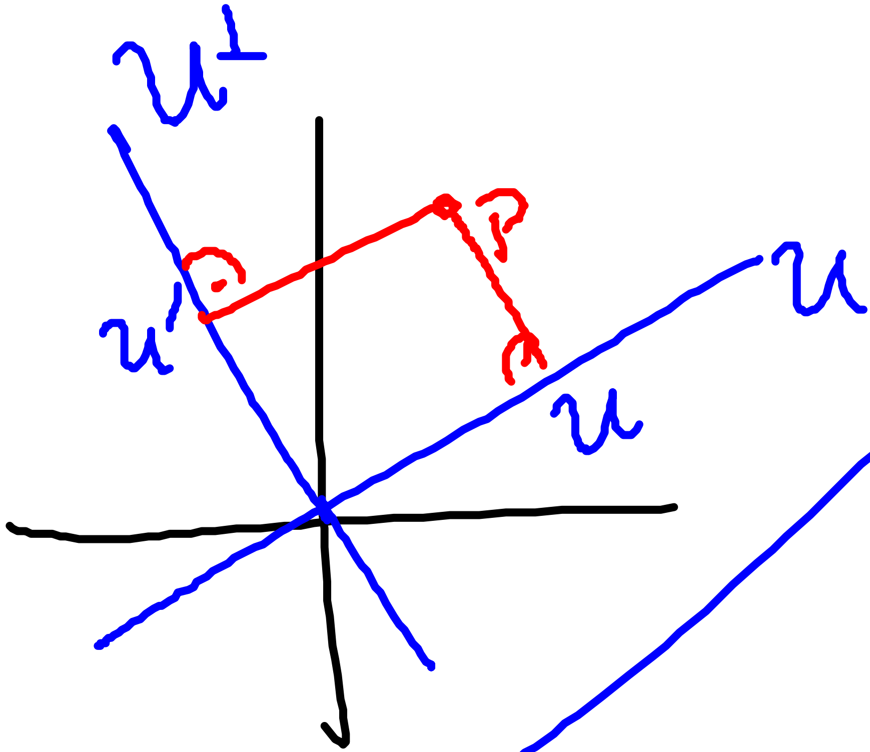
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_d \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_2, v_d \rangle \\ \vdots & & \\ \langle v_d, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_d, v_d \rangle \end{pmatrix}}_{A^T A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_d \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle v_1, p \rangle \\ \langle v_2, p \rangle \\ \vdots \\ \langle v_d, p \rangle \end{pmatrix}}_{A^T \cdot p}$$

$$\boxed{A^T A \cdot x = A^T \cdot p}$$

Eindeutig lösbar weil $A^T A$ invertierbar

$x = (A^T A)^{-1} A^T p$

$$p = \underset{\substack{\text{senkrechte Proj von } p \\ \text{auf } U}}{\overset{\in U}{u}} + \underset{\substack{\text{senkrechte Proj von } p \\ \text{auf } U^\perp}}{\overset{\in U^\perp}{u'}}$$



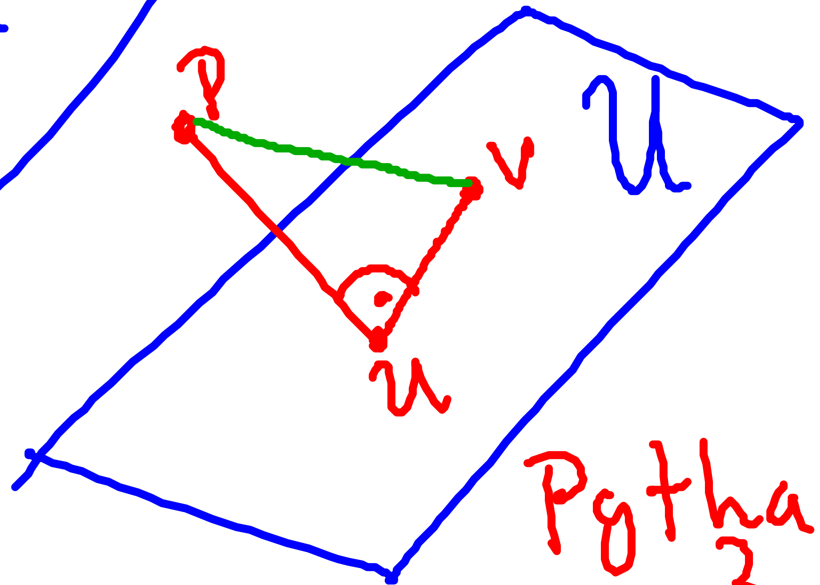
Satz: u ist der Vektor aus U der zu p den kleinsten Abstand hat.

„Bew": Sei $v \in U$ mit $v \neq u$

$\Rightarrow v - u \in U - \{0\}$

$p - u \in U^\perp$

$\Rightarrow (p-u) \perp (v-u)$



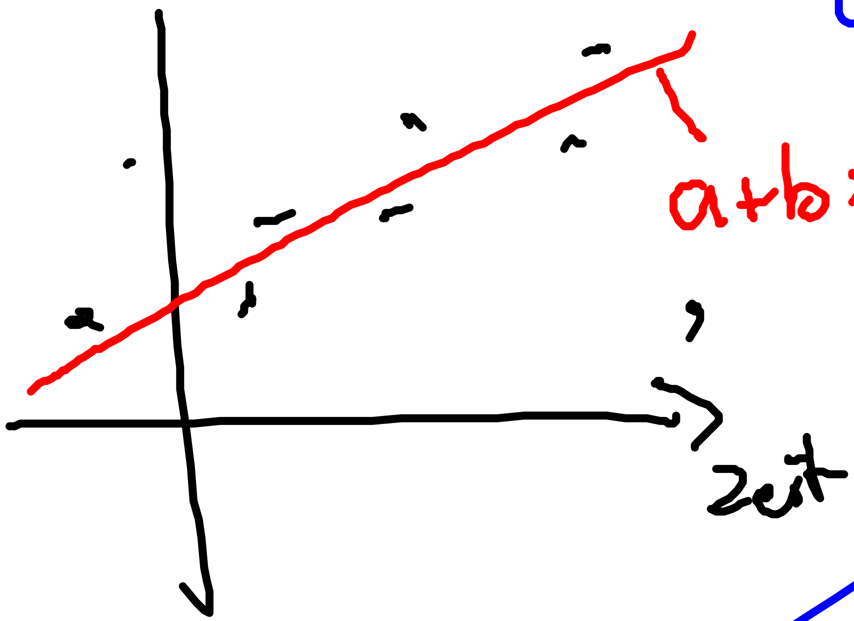
Pythagoras

$$\|p-v\|^2 = \|p-u\|^2 + \underbrace{\|v-u\|^2}_{>0}$$

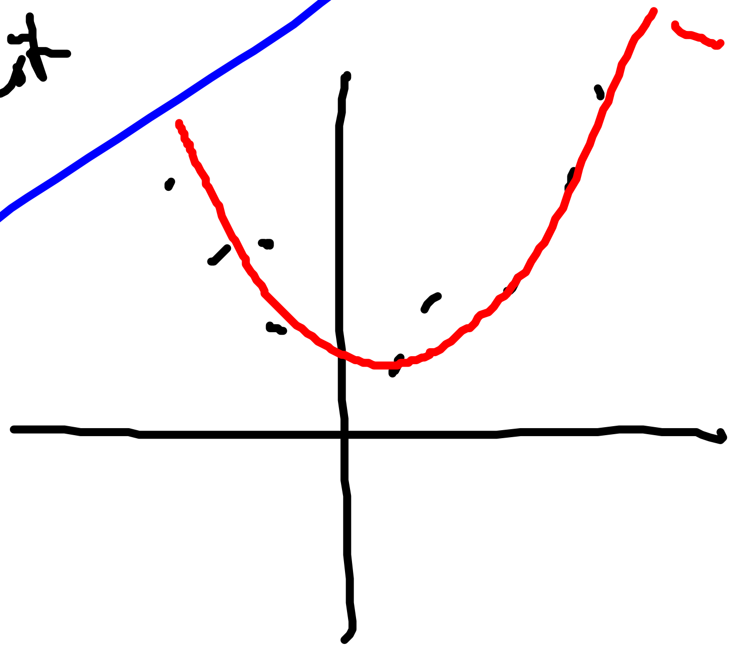
Anwendung: Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

gegeben Messdaten $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$

gesucht: Gerade, die die Messdaten möglichst gut annähert (lineare Regression)



$a+bx=y$



$a+bx+cx^2=y$

gesucht möglichst passende Parabel (quadratische Reg.)

Allgemein: Messdaten $(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$

Satz von Basisfunktionen $f_1(x), f_2(x) \dots f_d(x)$

gesucht Parameter $\lambda_1 \dots \lambda_d$ so daß

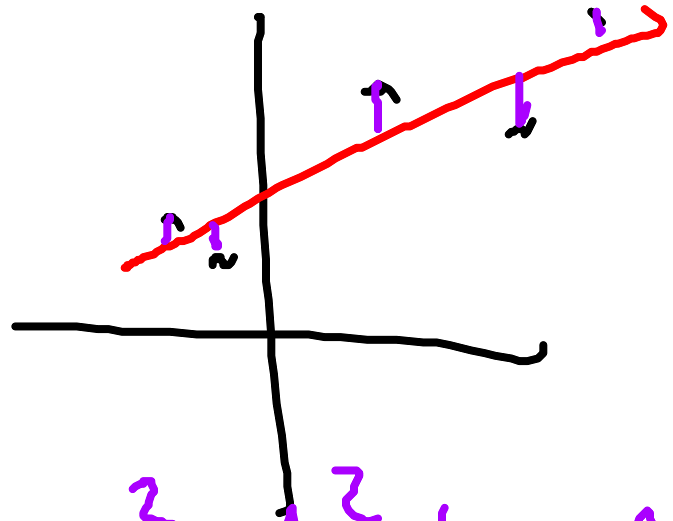
$$\lambda_1 f_1(x) + \dots \lambda_d f_d(x) = F_\lambda(x)$$

die die Daten möglichst gut approximiert.

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Fehler in der Approx

$$F_\lambda(x_i) - y_i =: \Delta_i$$



Suche λ so daß

$\|\Delta\|$ minimal wird (Minimiere $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots \Delta_n^2$)

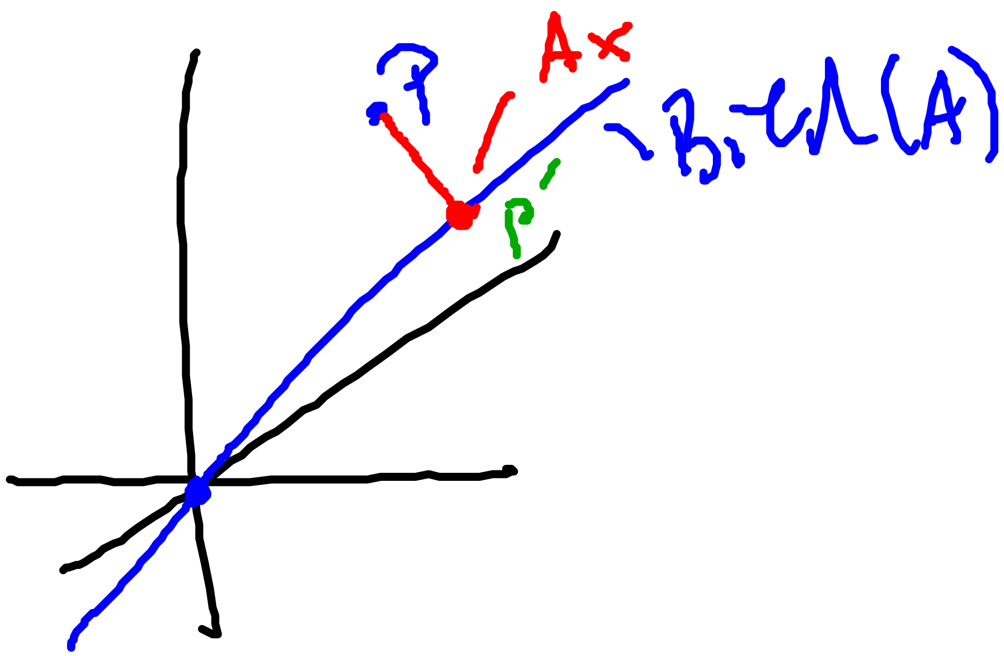
Modellierung als LGS

Approximiertes Wert

Wunschwert

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_d(x_1)\\ & \vdots & \\ f_1(x_n) & \cdots & f_d(x_n)\end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_d\end{pmatrix}}_{x} = \begin{pmatrix} F_\lambda(x_1)\\ \vdots \\ F_\lambda(x_n)\end{pmatrix} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}}_{p}$$

gesucht $x \in \mathbb{R}^d$ so daß $\|Ax-p\|$ möglichst klein wird



Suche $p' \in \text{Bild}(A)$ so daß $\|p-p'\|$ möglichst kurz wird.

$\Rightarrow$ p' ist senkrechte Proj. von p auf $\text{Bild}(A)$

$(Ax - p) \perp v_i$ für alle $i = 1 \dots d$ $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_d \\ | & & | \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \langle v_i, Ax - p \rangle = 0$ für alle $i = 1 \dots d$

$\Leftrightarrow v_i^T (Ax - p) = 0$ für alle $i = 1 \dots d$

$\Leftrightarrow A^T (Ax - p) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{A^T A x = A^T p}$

Beispiel Wertepaare

$(-1,1)$
$(0,1)$
$(1,2)$
$(2,2)$

gesucht Regressionsgerade

$a+bx=y$

Basisfkt.

$1,\ x$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$A^TP=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&6\end{pmatrix}$$

Löse

$$\begin{pmatrix}4&3\\2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$$

$$F(x)=\frac{2}{5}x+\frac{13}{10}$$