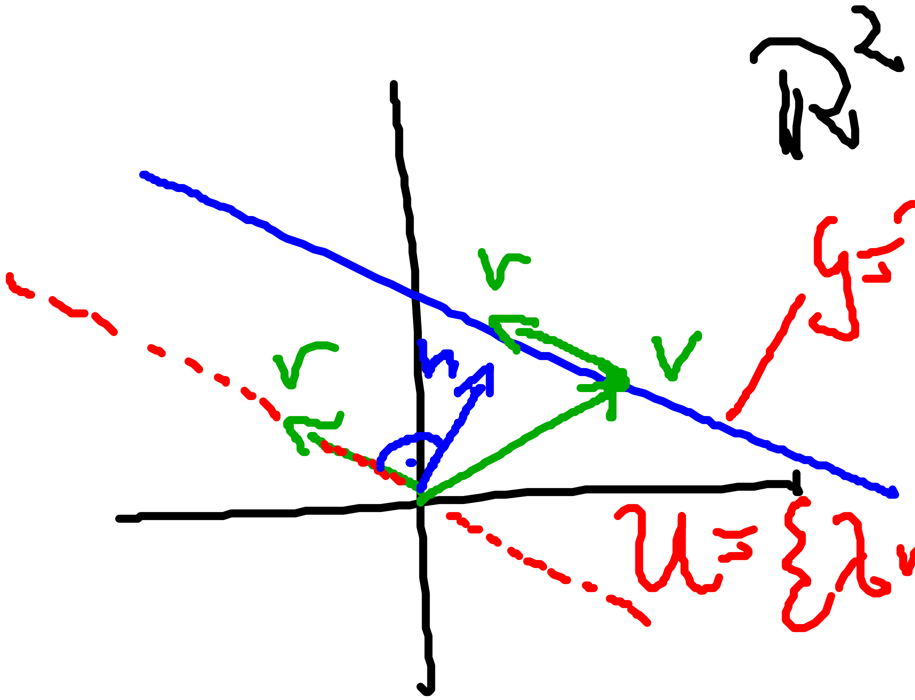
1.4. Hessesche Normalform



$g = U + v$

$U = \{\lambda r \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Gerade ist durch r, v eindeutig bestimmt

$$g = \{\lambda \cdot r + v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Aber g bestimmt nicht eindeutig r und v

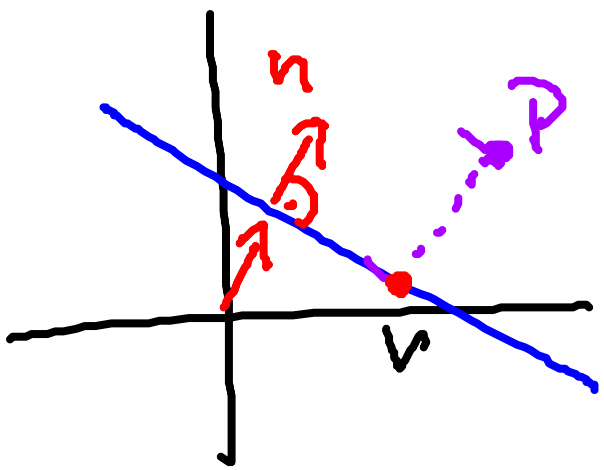
Hessesche Normalform von g:

Sei n ein normierten senkrecht auf U stehenden Vektor ($\|n\| = 1$, $\langle r, n\rangle = 0$, n heißt Normale von U.)

$$g = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p, \underline{\underline{n}}\rangle - \underline{\underline{d}} = 0\} \text{ mit } d = \langle v, n\rangle.$$

Bew.: $\langle \lambda r + v, n\rangle - d = \langle \lambda r, n\rangle + \langle v, n\rangle - \langle v, n\rangle = \lambda\langle r, n\rangle = 0$

• HNF ist bis auf Vorzeichen eindeutig.



• Abstand eines Punktes p zu G

$\operatorname{dist}(p, G) = \min\{\|v-p\| \mid v \in G\}$

<u>Satz</u> Sei $v \in G$ mit $(v-p) = \lambda n \Rightarrow$

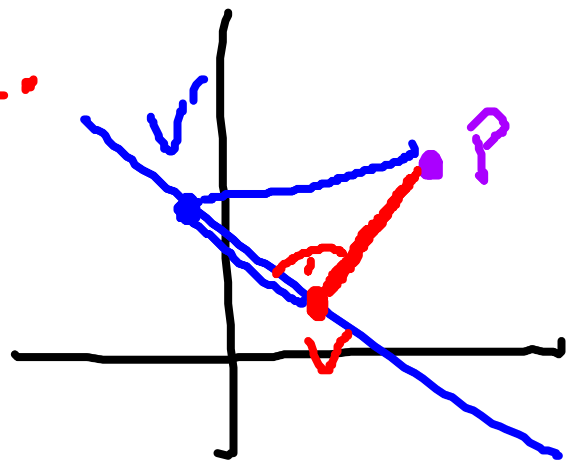
$\operatorname{dist}(p, G) = \|v-p\|$

<u>Bew</u> 1. Zeige v ist eindeutig; 2. $\|v-p\|$ ist minimal.

1. $\langle v, n\rangle - d = 0$, $v = \lambda n + p$

$= \langle \lambda n + p, n\rangle - d = 0 \Rightarrow \lambda \overbrace{\langle n, n\rangle}^{=1} + \langle p, n\rangle - d = 0 \Rightarrow v$ ist eind.

2.

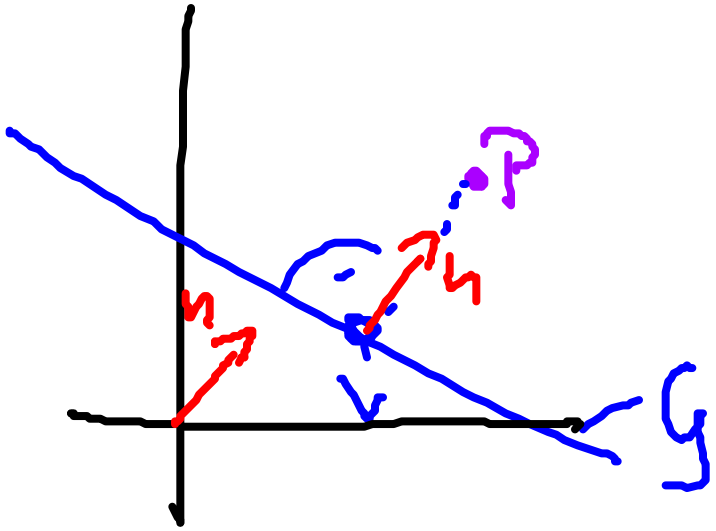


Sei $v' \neq v$, $v' \in G$

$\Rightarrow v'-v \perp n \Rightarrow v'-v \perp v-p$

$\|v'-p\|^2 = \|v-p\|^2 + \underbrace{\|v-v'\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow \|v-p\| = \operatorname{dist}(G, p)$

• v heißt Lotfußpunkt von p auf G



$\langle v,n\rangle - d = 0$

Satz $\operatorname{dist}(G,p) = |\langle p,n\rangle - d|$

Bew sei v der Lotfußpkt. von p auf G.

$(v-p) = \lambda n, \quad \langle v,n\rangle - d = 0$

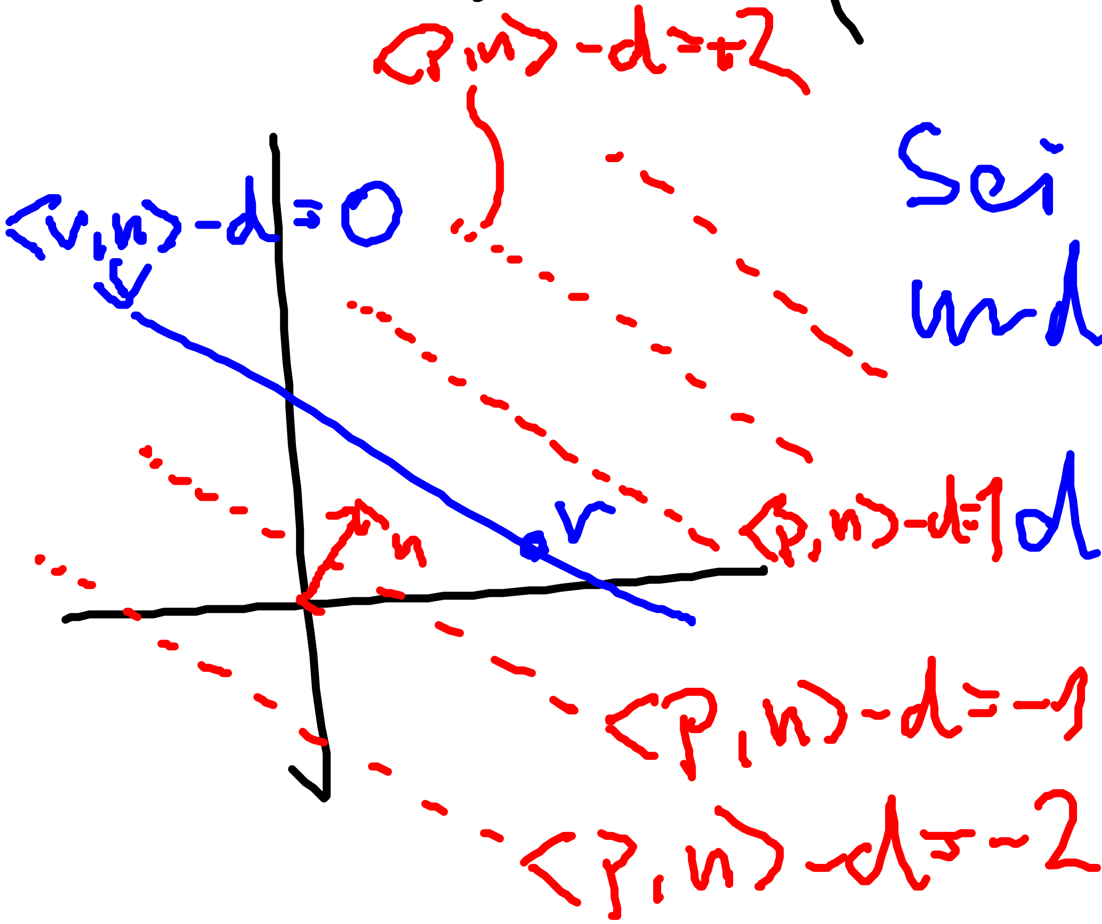
$$\operatorname{dist}(G,p) = \|v-p\| = \|\lambda \cdot n\| = |\lambda| \cdot \|n\|$$

Zeige: $p - (\langle p,n\rangle - d)\, n \in G$

$$\langle p - (\langle p,n\rangle - d)\cdot n, n\rangle - d =$$

$$\langle p,n\rangle - (\langle p,n\rangle - d)\overset{=1}{\langle n,n\rangle} - d = 0$$

Insbesondere



Sei n Normalvektor von G und $v \in G$.

$d = \langle v, n\rangle$

Höhere Dimensionen:

Def: Sei U ein d-dimensionaler Unterraum eines n-dimensionalen Vektorraums V. Sei $v \in V$.

- $U+v = \{u+v \mid u \in U\}$ heißt d-dimensionaler affiner Raum.
- $\dim(U+v) = d$ heißt Dimension von $U+v$
- $\operatorname{codim}(U+v) = n-d$ heißt Codimension.
- 1-dimensionale affine Räume heißen Geraden
- 2-dimensionale affine Räume heißen Ebenen
- Räume mit Co-dimension 1 heißen Hyperebenen

Hessesche Normalform für Hyperebenen

Sei $V=\mathbb{R}^k$ und sei H eine affine Hyperebene in V.

Dann gibt es $n \in V$, $\|n\|=1$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$H=\{p \in V \mid \langle p, n\rangle - d = 0\}$$

Bew Sei $H=U+v$, mit $U=\operatorname{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$

Betrachte LGS:

$$\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_{k-1} & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ n \\ | \end{pmatrix} = 0$$

$\operatorname{rang}=k-1$

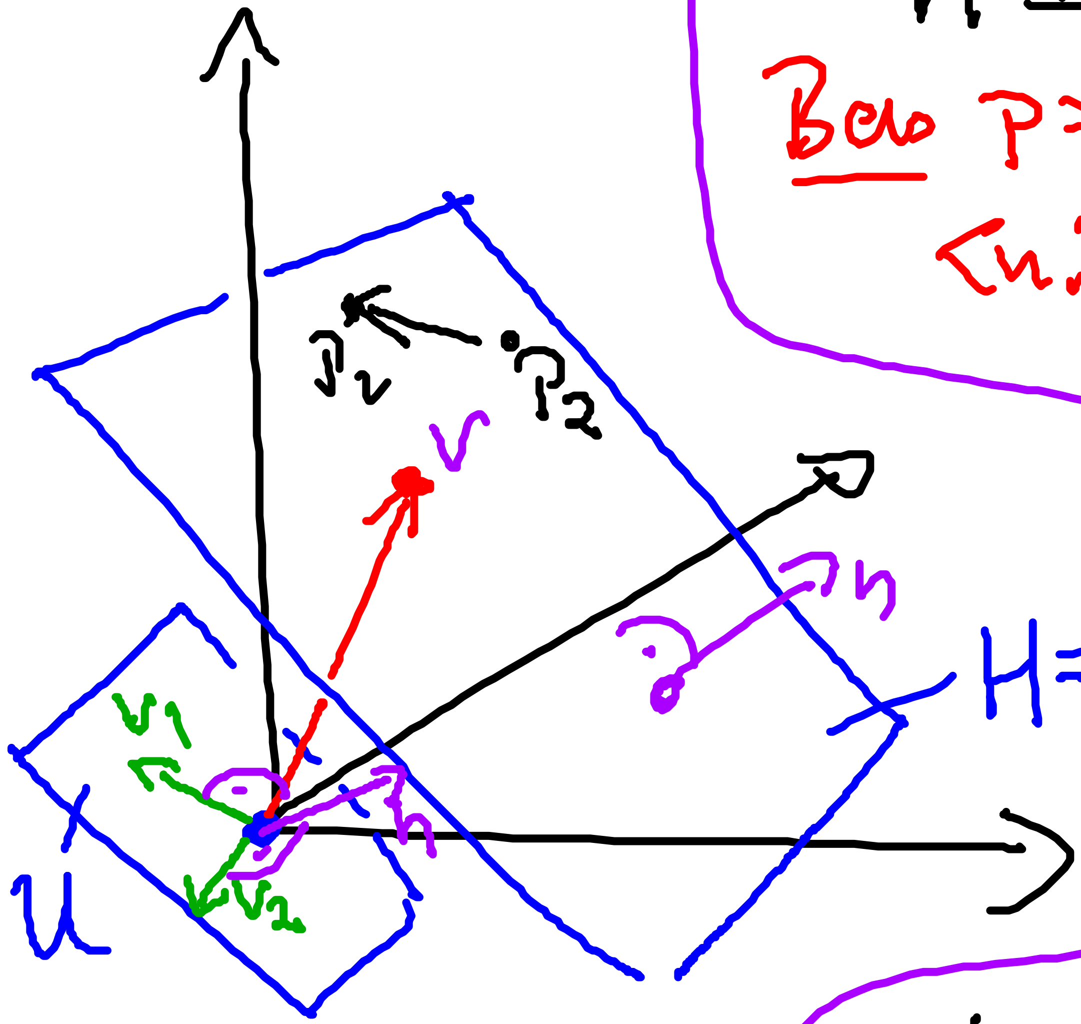
Lösungsraum ist 1-dimensional

Sei n Lösung mit $\|n\|=1$

und $d=\langle v, n\rangle$

Beh: $\langle p, n\rangle - d = 0$ für $p \in H$, $p=v+\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_{k-1}v_{k-1}$

$$\langle v+\sum \lambda_i v_i, n\rangle - d = \langle v, n\rangle + \sum \lambda_i \langle v_i, n\rangle - d = \langle v, n\rangle - \langle v, n\rangle = 0$$



Bemerkungen

- $n \perp p$ für jedes $p \in U$

Bew $p = \sum \lambda_i v_i$

$\langle n, p \rangle = \langle n, \sum \lambda_i v_i \rangle =$

$\sum \lambda_i \langle n, v_i \rangle = 0$

- $n \perp (p_1 - p_2)$ für alle $p_1, p_2 \in H$

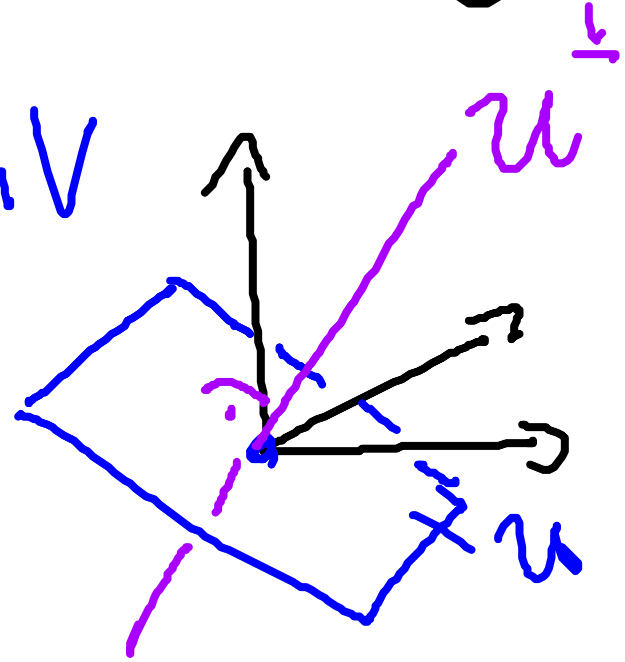
- $|\langle n, p \rangle - d|$

Abstand von p zu H

1.5. Orthogonalraum.

Sei U ein d-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$

Def $U^\perp = \{ u' \mid u' \perp u$ für alle $u \in U \}$



Satz (i) $U^\perp$ ist Untervektorraum von V

(ii) $U \cap U^\perp = \{0\}$

(iii) $\dim(U^\perp) = n-d$

(iv) $(U^\perp)^\perp = U$

Bew (i) • $0 \in U^\perp$ denn $\langle 0, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$

• Sei $u_1' \in U^\perp$, $u_2' \in U^\perp$

$\langle u_1' + u_2', u \rangle = \langle u_1', u \rangle + \langle u_2', u \rangle = 0$ für alle $u \in U$

• Sei $u' \in U^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle \lambda u', u \rangle = \lambda \langle u', u \rangle = 0$ für alle $u \in U$

Bew (ii) Sei $v \in U \cap U^\perp \Rightarrow v \perp v$

$\Rightarrow \langle v, v \rangle = 0$

$\Rightarrow v = 0$

(iii) Sei $v_1 \ldots v_d$ Basis von U

Sei $A = \begin{pmatrix} - & v_1 & \to \\ & \vdots & \\ - & v_d & - \end{pmatrix}$ rang$(A) = d$

$\Rightarrow \dim(\text{Bild}(A)) = d$

$\Rightarrow \dim(\underline{\text{Kern}(A)}) = n - d$

<u>Beh</u>: $U^\perp = \text{Kern}(A) = \{ u \in V \mid \langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle = \ldots$
$= \langle u, v_d \rangle = 0 \}$

$U^\perp \subseteq \text{Kern}(A)$ denn $\{v_1 \ldots v_d\} \subseteq U$

$U^\perp \supseteq \text{Kern}(A)$ Sei $v \in \text{Kern}(A)$ und $u \in U$

$\Rightarrow u = \sum \lambda_i v_i \Rightarrow \langle v, \sum \lambda_i v_i \rangle = \sum \lambda_i \langle v, v_i \rangle = 0$

$\Rightarrow v \perp u \Rightarrow v \in U^\perp$

(iv) ..... selber machen