1.3 Normen und Winkel:

Norm eines Vektors: $\sqrt{s(v,v)} =: \|v\|_s$

Wichtige Eigenschaften der Norm:

(i) $\|v\|_s = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (definit)

(ii) $\|\lambda \cdot v\|_s = |\lambda| \cdot \|v\|_s$ (homogen)

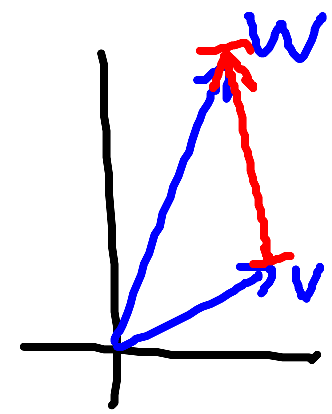
(iii) $\|v+w\|_s \leq \|v\|_s + \|w\|_s$ (Dreiecksungleichung)

Def sei $N: V \to \mathbb{R}^+$ eine Abbildung, die (i)–(iii) erfüllt, dann nennt man N eine Norm auf V.

⚠ Es gibt Normen, die nicht von einem Skalarprodukt herrühren.

Def: Abstand

Sei $N(v)$ eine Norm, so heißt $d: V \times V \to \mathbb{R}^+$ mit $d(v,w) = N(v-w)$ der Abstand von v und w.



Satz $\|v\|_s = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ ist ein Norm

$\langle v,v\rangle := s(v,v)$ Für diese Tafel

Bew (i) definit: Folgt direkt aus Positiv definit von $s(,)$

(ii) $\|\lambda \cdot v\|_s = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle}$

$= \sqrt{\lambda^2 \langle v,v\rangle}$

$= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle v,v\rangle}$

$= |\lambda| \cdot \| v \|$

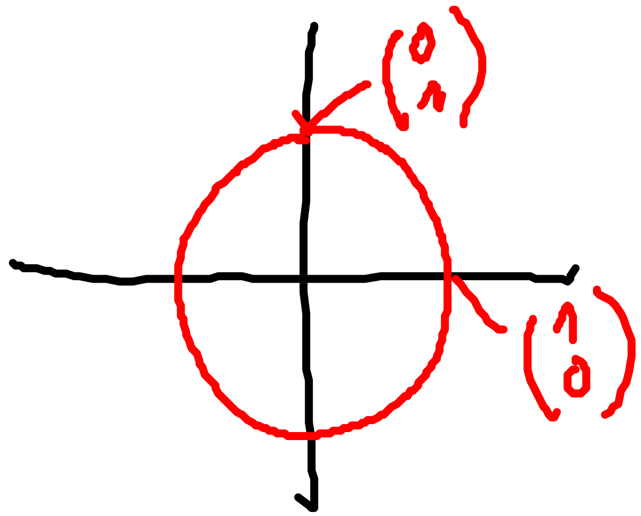
(iii) später

Der Einheitskreis einer Norm in $\mathbb{R}^2$

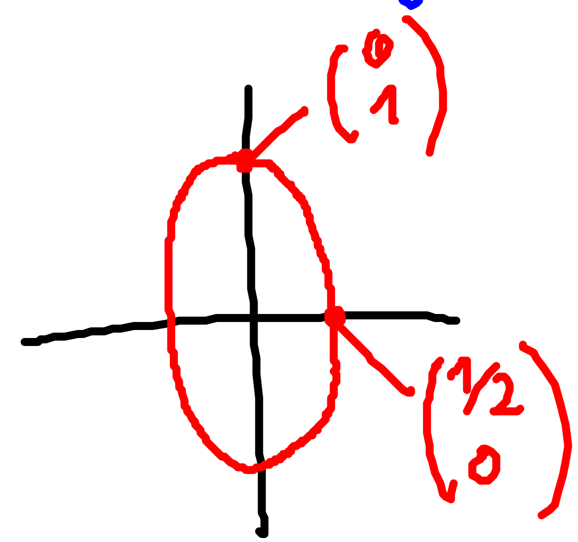
Es sei $\|\ldots\|$ eine Norm in $\mathbb{R}^2$ (die nicht notwendig von einem Skalarprodukt kommt) Die Menge $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\|=1\}$ heißt Einheitskreis der Norm. Wg (ii) ist die Norm durch den Einheitskreis bestimmt.

Beispiele:

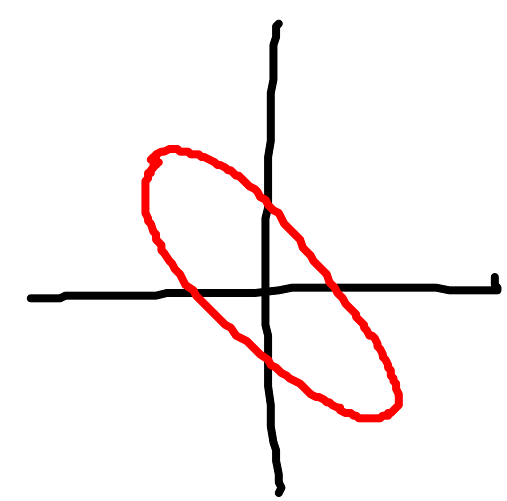
$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$



$s(v,v) = (x,y)\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



$s(v,v) = (x,y)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



Satz Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (CSU)

$$|s(v,w)| \le \|v\|_s \, \|w\|_s$$

Bew: Fall 1: $w = 0 \Rightarrow |s(v,0)| \le \|v\|_s \, \|0\|$

$$0 \le 0$$

Fall 2: $w \neq 0$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 \le s(v-\lambda w, v-\lambda w) = \|v\|_s^2 - 2\lambda s(v,w) + \lambda^2 \|w\|_s^2$$

Es sei $\lambda = \dfrac{s(v,w)}{\|w\|_s^2} \Rightarrow$

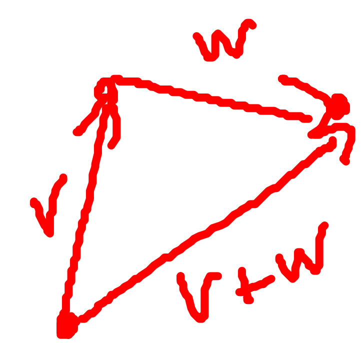
$$0 \le \|v\|_s^2 - 2\,\frac{s(v,w)^2}{\|w\|_s^2} + \frac{s(v,w)^2}{\|w\|_s^2} = \|v\|_s^2 - \frac{s(v,w)^2}{\|w\|_s^2}$$

$s(v,w)^2 \le \|v\|_s^2 \cdot \|w\|_s^2 \Rightarrow$ CSU durch Wurzelziehen

Beweis der Dreiecksungleichung aus CSU

$$\|v+w\|_s^2 = s(v+w,\ v+w)$$
$$= s(v,v) + 2s(v,w) + s(w,w)$$
$$= \|v\|_s^2 + 2s(v,w) + \|w\|_s^2$$
$$\leq \|v\|_s^2 + 2(\|v\|_s \cdot \|w\|_s) + \|w\|_s^2$$
$$= (\|v\|_s + \|w\|_s)^2$$

Dreiecksungleichung folgt durch Wurzelziehen

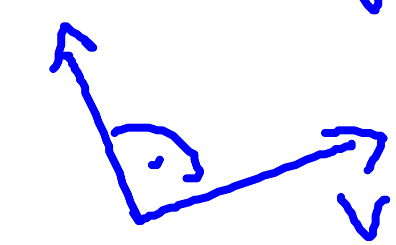


Wegen CSU für $v \neq 0$, $w \neq 0$

$$-1 \leq \frac{s(v,w)}{\|v\|_s \, \|w\|_s} \leq 1$$

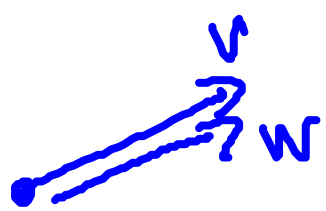
Spezialfälle

$v \perp_s w$



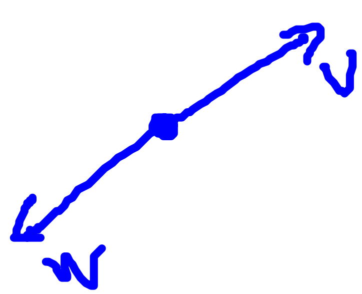
$$\frac{\overset{=0}{s(v,w)}}{\|v\|_s \, \|w\|_s} = 0$$

$v = w$

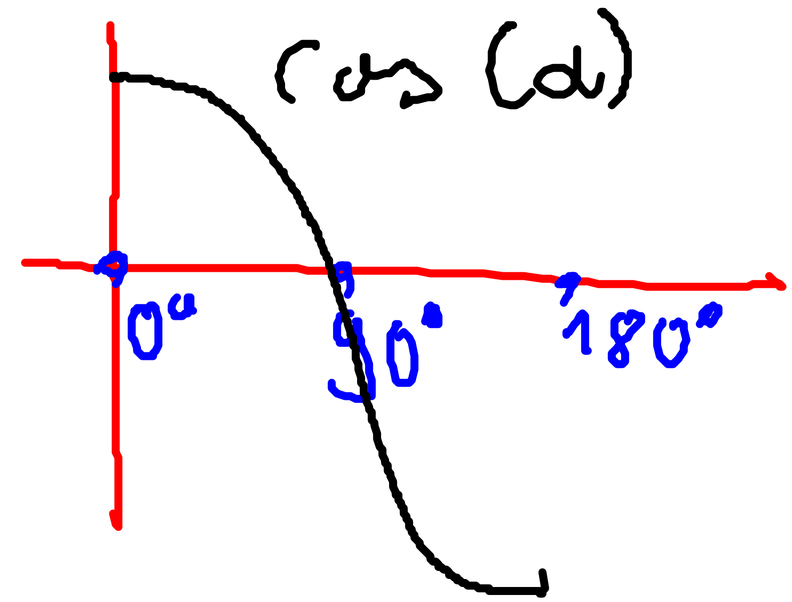


$$\frac{s(v,v)}{\|v\|_s^2} = 1$$

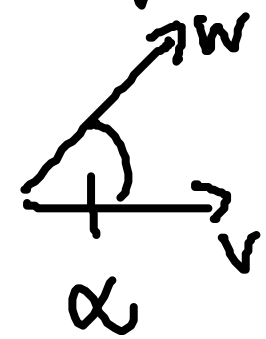
$v = -w$



$$\frac{s(v,-v)}{\|v\|_s^2} = -1$$



Def Winkel bzgl s

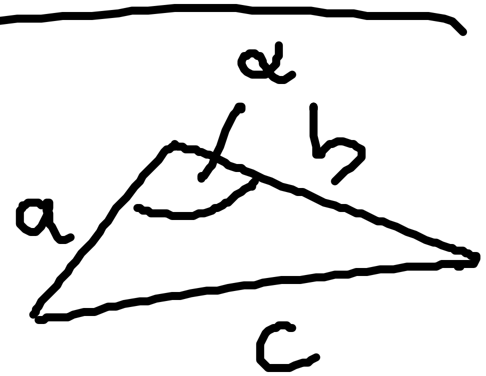


$$\alpha = \arccos\left(\frac{s(v,w)}{\|v\|_s \, \|w\|_s}\right)$$

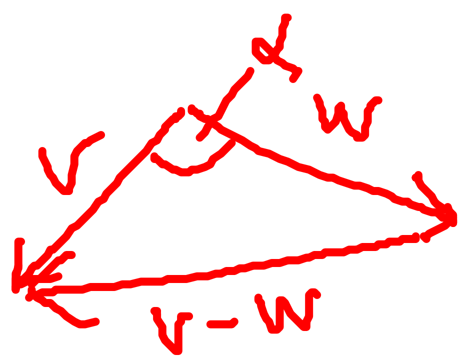
Skalarprodukt und Winkel

Sei $\langle \dots, \dots \rangle$ das kanonische Skalarprodukt

<u>Kosinussatz:</u>



$$a^2+b^2-2ab\cos(\alpha)=c^2$$



$$\|v\|^2+\|w\|^2-2\|v\|\|w\|\cdot\cos(\alpha)=\langle v-w, v-w\rangle$$

$$=\|v\|^2-2\langle v,w\rangle+\|w\|^2$$

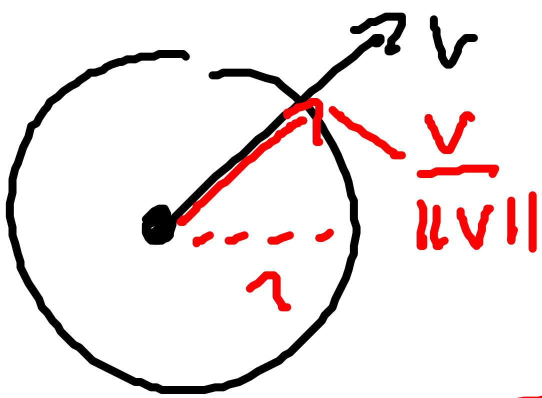
$$\Rightarrow \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos(\alpha)=\langle v,w\rangle$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

Normierte Vektoren

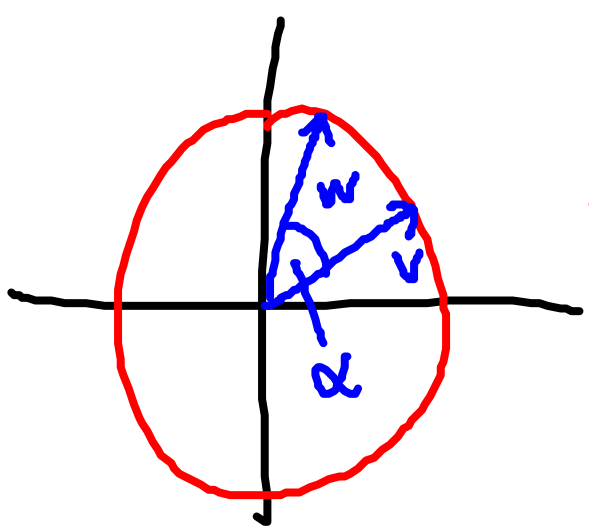
v ist normiert wenn $\|v\| = 1$

Für jedes $v \neq 0$ ist $\frac{v}{\|v\|}$ normiert mit Richtung v



$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$$

Winkel zwischen normierten Vektoren

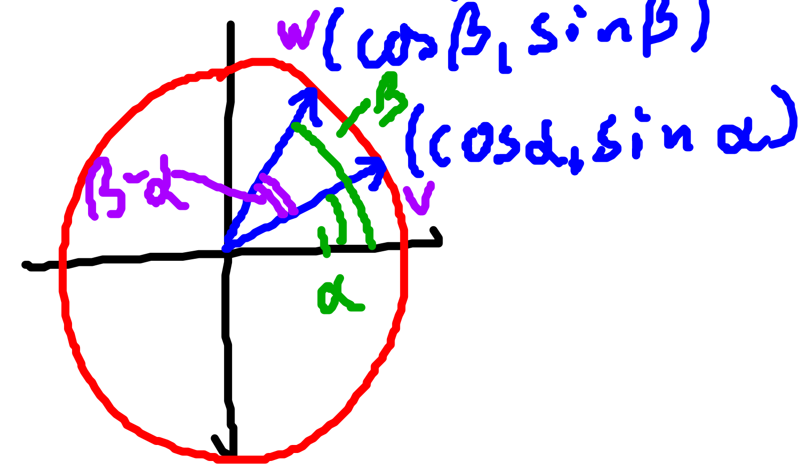


$$\boxed{\cos(\alpha) = \langle v, w \rangle}$$

Bew

$$\langle v, w \rangle = \cos(\alpha) \cdot \underbrace{\|v\| \cdot \|w\|}_{1}$$

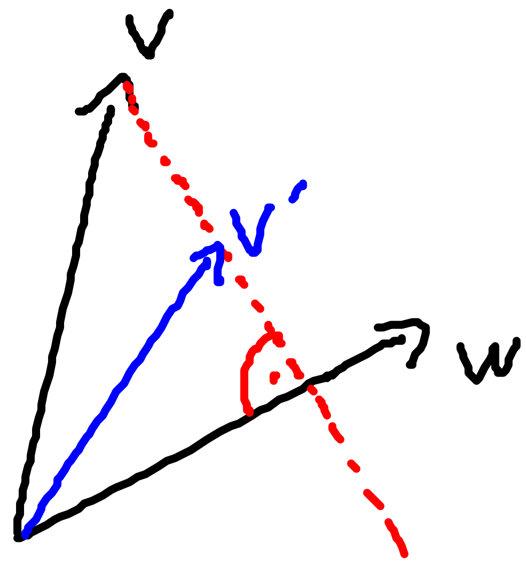
Winkeldifferenz



$$\cos(\beta - \alpha) = \langle v, w \rangle$$

$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Für welche v' ist $\langle v, w\rangle = \langle v', w\rangle$

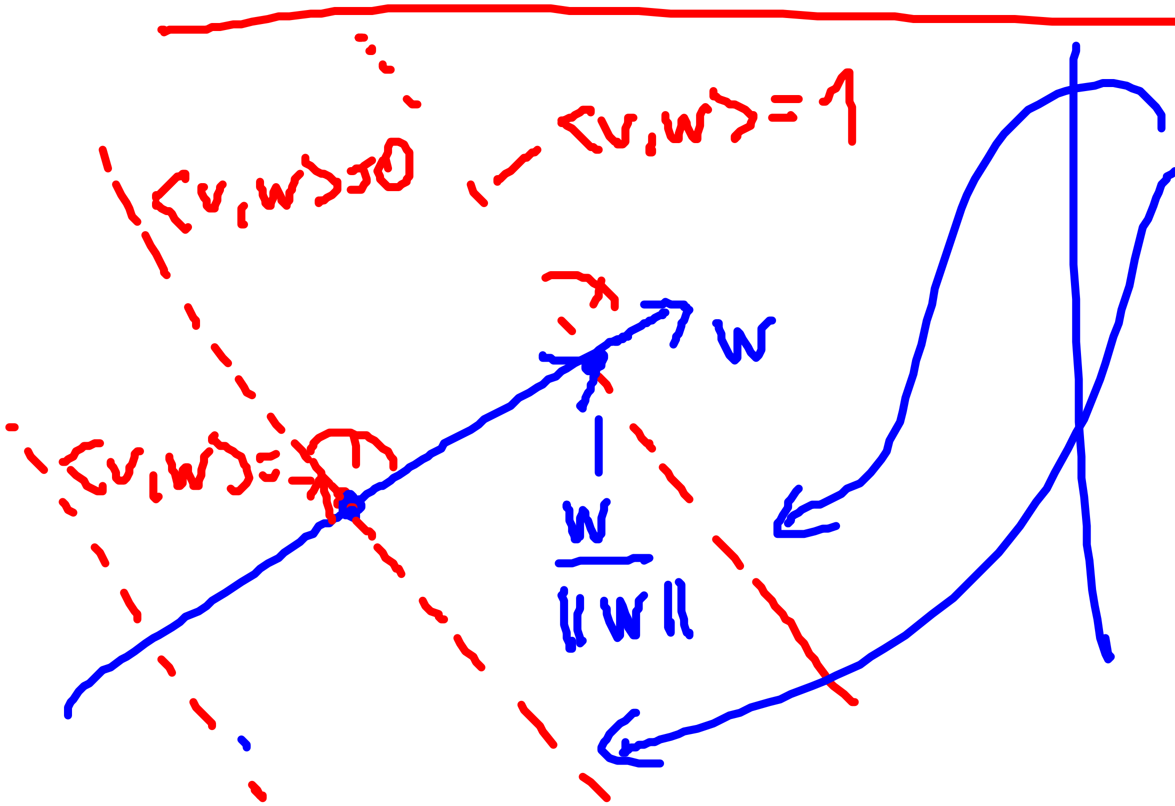


Satz 2 $\quad \langle v,w\rangle = \langle v',w\rangle \iff v - v' \perp w$

Bew $\langle v,w\rangle = \langle v',w\rangle$

$\iff \langle v,w\rangle - \langle v',w\rangle = 0$

$\iff \langle v-v',w\rangle = 0 \iff v - v' \perp w$

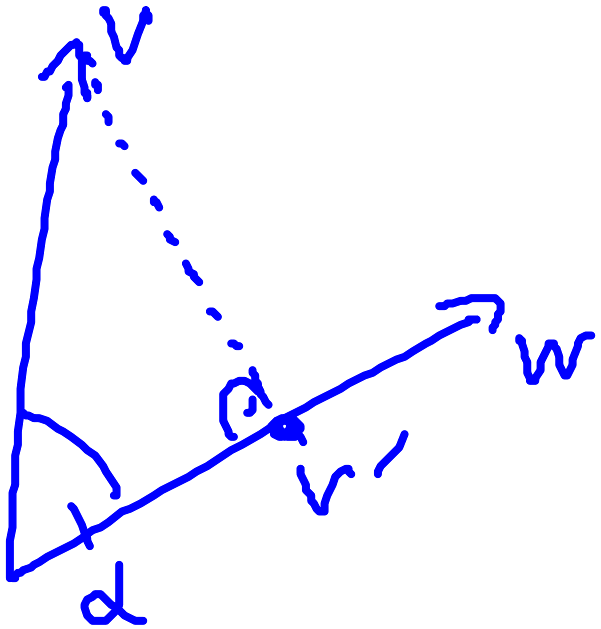


Restklassen von

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \langle v,w\rangle$

Zwei nützliche Formeln:

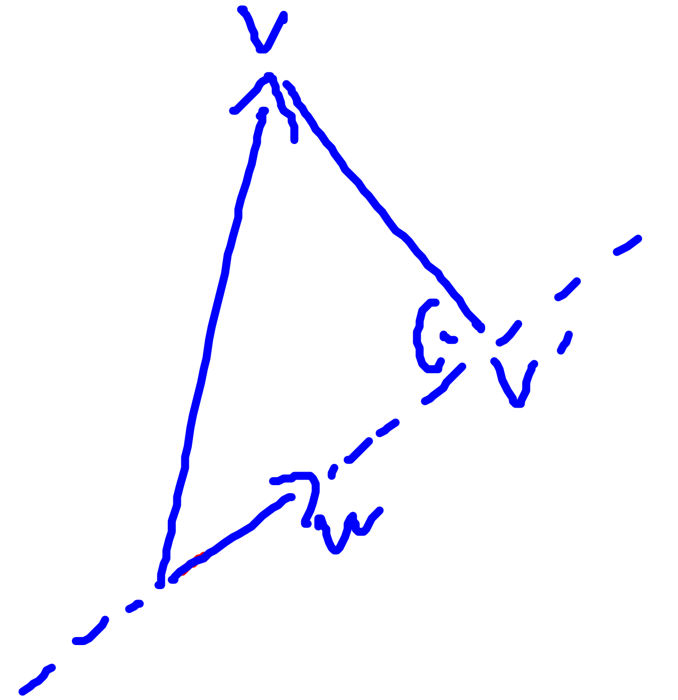


$$\boxed{v' = \frac{w}{\|w\|}\cdot\cos(\alpha)\cdot\|v\|}$$

Bew $\langle v', w\rangle = \left\langle \frac{w}{\|w\|}\cdot\cos(\alpha)\cdot\|v\|, w\right\rangle$

$= \frac{1}{\|w\|}\cdot\cos(\alpha)\cdot\|v\|\cdot\langle w, w\rangle$

$= \cos(\alpha)\cdot\|v\|\cdot\|w\| = \langle v, w\rangle$



$$\boxed{v' = \langle v, w\rangle\cdot w}$$

Bew $\langle v', w\rangle =$

$\langle\langle v, w\rangle\cdot w, w\rangle =$

$\langle v, w\rangle\cdot\underbrace{\langle w, w\rangle}_{1} = \langle v, w\rangle$