Was bisher geschah:

Zentrale Begriffe	Zentrale Objekte
– Gruppen	– „Zahlen" reelle, komplexe
– Ringe	– Polynome
– Körper	– Vektoren
– Vektorräume	– Matrizen
– Abbildungen	⊢ Lineare GLS
	∟ Transformat.

Zentrale Themen:

- Axiomatisierung
- Lineare Abbildungen
  - Kern, Bild, Rang, Transformationen
- Lineare Gleichungssysteme (Lösungsverfahren)
- Determinanten
- Eigenwerte Eigenvektoren

In diesem Semester:

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

→ Viele vertiefende Themen:

- Schlaglichter zu einzelnen Themen
- Mehr Geometrie
- Aufbau eines dichten Begriffsnetzes

Themenschwerpunkte:

- Vektorprodukte
  (Skalarprodukt, Kreuzprodukt, ...)
  Länge, Winkel, Geometrie von $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ ... $\mathbb{C}^n$

- Mehr zum Lösen von LGS
  (Matrizenzerlegungen, Iterative Verfahren, ...)

- Matrizengruppen
  (Drehgruppen, lineare Gruppen ...)

- Invarianten einer Matrix
  (Fortgeschrittene Eigenwerttheorie
  Jordansche Normalform, Singulärwerte)

- Kreise, Kegelschnitte, Quadriken
- Mehr über Determinanten
  - Volumen
  - Orientierungen
- Analytische Geometrie
  - Formeln für Geraden, Ebenen, ...
  - Transformationen
- Projektive Geometrie

- Diverse Anwendungen der LA
  - LA und Optimierung
  - LA und Rendering
  - LA und Stochastik

    ⋮

Literatur:

Gerd Fischer: Lineare Algebra (Vieweg)

Max Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie (Springer)

Howard Anton: Lineare Algebra (Spektrum)

① Bilinearformen (und Skalarprodukte)

1.1. das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Es sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Def: $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n$
heißt kanonisches Skalarprodukt von v und w.

$\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $\langle v, w \rangle = v^T \cdot w$

$= (v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$

Matrix $\quad$ Vektor

$$\underbrace{\begin{pmatrix} — & a_1 & — \\ & \vdots & \\ — & a_n & — \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} | \\ w \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1, w \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n, w \rangle \end{pmatrix}$$

Matrix · Matrix

$$\underbrace{\begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} \text{—} \; a_1 \; \text{—} \\ \vdots \\ \text{—} \; a_k \; \text{—} \end{pmatrix} \end{array}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_m \\ | & & | \end{pmatrix}}_{B} \begin{array}{c} n \end{array} = \begin{pmatrix} \langle a_1, b_1 \rangle & \cdots & \cdots \\ \langle a_2, b_1 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \\ \langle a_k, b_1 \rangle & \cdots & \langle a_k, b_m \rangle \end{pmatrix}$$

Wichtige Eigenschaften:

(i) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ ⇐ symmetrisch

(ii) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$ ⇐ linear (bi-linear)

(iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$

$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ positiv definit

Bew (i) klar aus Symmetrie der Definition

(ii) $\langle \lambda v, w\rangle = (\lambda \cdot v^T)\cdot w = \lambda \cdot (v^T \cdot w) = \lambda \cdot \langle v, w\rangle$

$\langle v_1 + v_2, w\rangle = (v_1+v_2)^T \cdot w = v_1^T \cdot w + v_2^T \cdot w = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$

(iii) $\langle v, v\rangle = \underbrace{v_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{v_2^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{v_n^2}_{\geq 0} \geq 0$

Gleichheit nur für $v = 0$.

Bem (iii) ist äquivalent zu

(iii') $\langle v, v\rangle > 0$ für jedes $v \neq 0$

Def Eine symmetrische, positiv Definite Bilinearform $s(-,-): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt

Beispiel: $V = \mathbb{R}^2$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A^T$

$s(v,w) = v^T A w$ ist ein Skalarprodukt

(i) symmetrisch $\underline{v^T A w} \overset{\text{wg 1x1 Matrix}}{=} (v^T A w)^T = w^T A^T (v^T)^T$
$= w^T A^T v = \underline{w^T A v}$

(ii) linear in v und w wg Linearität der Matrizenmultiplikation.

(iii) $(x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + y^2$

$= x^2 + x^2 + 2xy + y^2$
$= x^2 + (x+y)^2 \geq 0$ Gleichheit nur für $x = y = 0$

1.2. Geometrische Grundbegriffe (Länge, Winkel)

Def Es sei $s(x,y)$ ein Skalarprodukt $v,w \in \mathbb{R}^n$

$\|v\|_s := \sqrt{s(v,v)}$ heißt Länge von v bzgl. s

$v \perp_s w :\Longleftrightarrow s(v,w)=0$ $\quad$ v,w senkrecht bzgl s

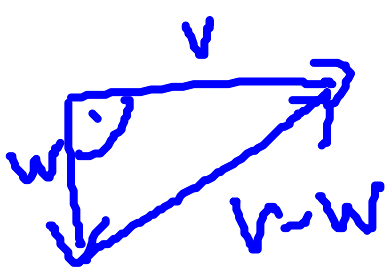
---

Für das kanonische Skalarprodukt schreiben wir

$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$ $\quad$ $v \perp w :\Longleftrightarrow \langle v,w\rangle = 0$

Satz des Pythagoras aus $v \perp_s w$ folgt

$$\|v\|_s^2 + \|w\|_s^2 = \|v-w\|_s^2$$



Bew: $\|v-w\|_s^2 = s(v-w,v-w) = s(v,v-w) - s(w,v-w)$

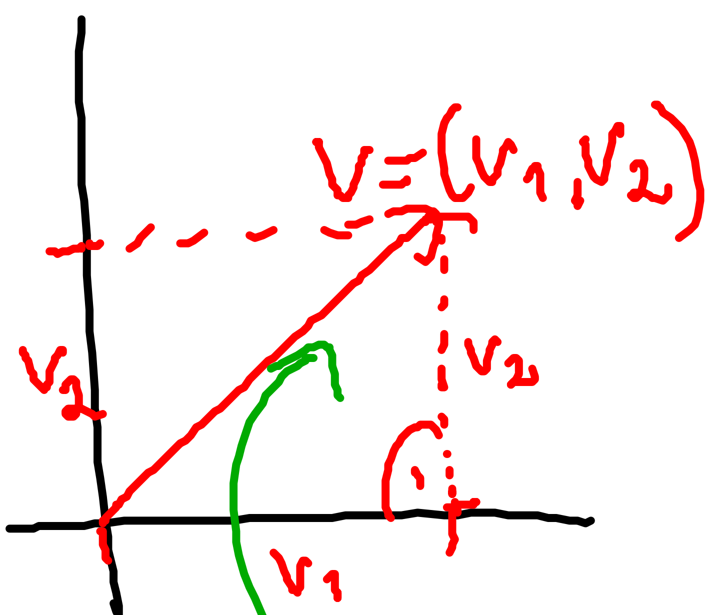
$$= s(v,v) - \underbrace{s(v,w)}_{=0} - \underbrace{s(v,w)}_{=0} + s(w,w) = \|v\|_s^2 + \|w\|_s^2$$

Geometrie des kanonischen Skalarproduktes

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ Länge von v.

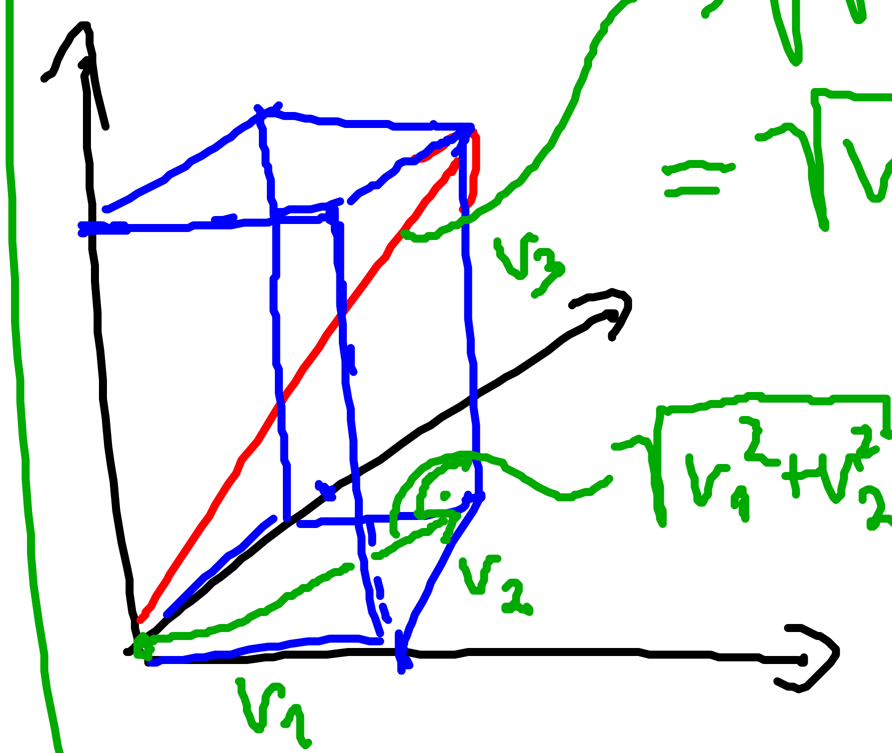
$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots v_n^2}$

Länge in $\mathbb{R}^2$



$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Länge in $\mathbb{R}^3$

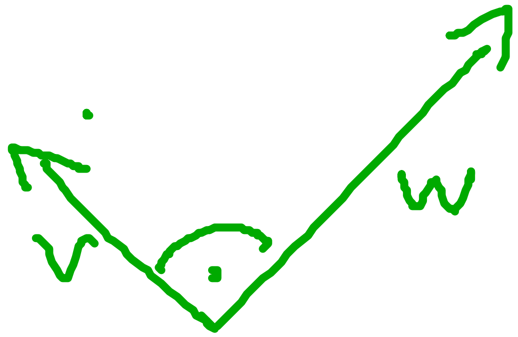


$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$\sqrt{\sqrt{v_1^2+v_2^2}^2 + v_3^2}$

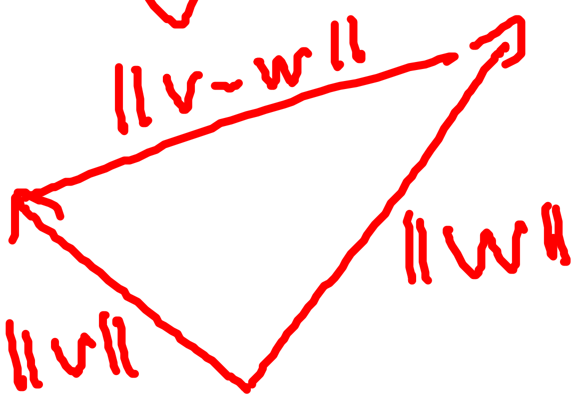
$= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Rechten Winkel bzgl kanonischen Skalarprod



$\Rightarrow \langle v, w \rangle = 0$

$\Downarrow$



$\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v-w\|^2$