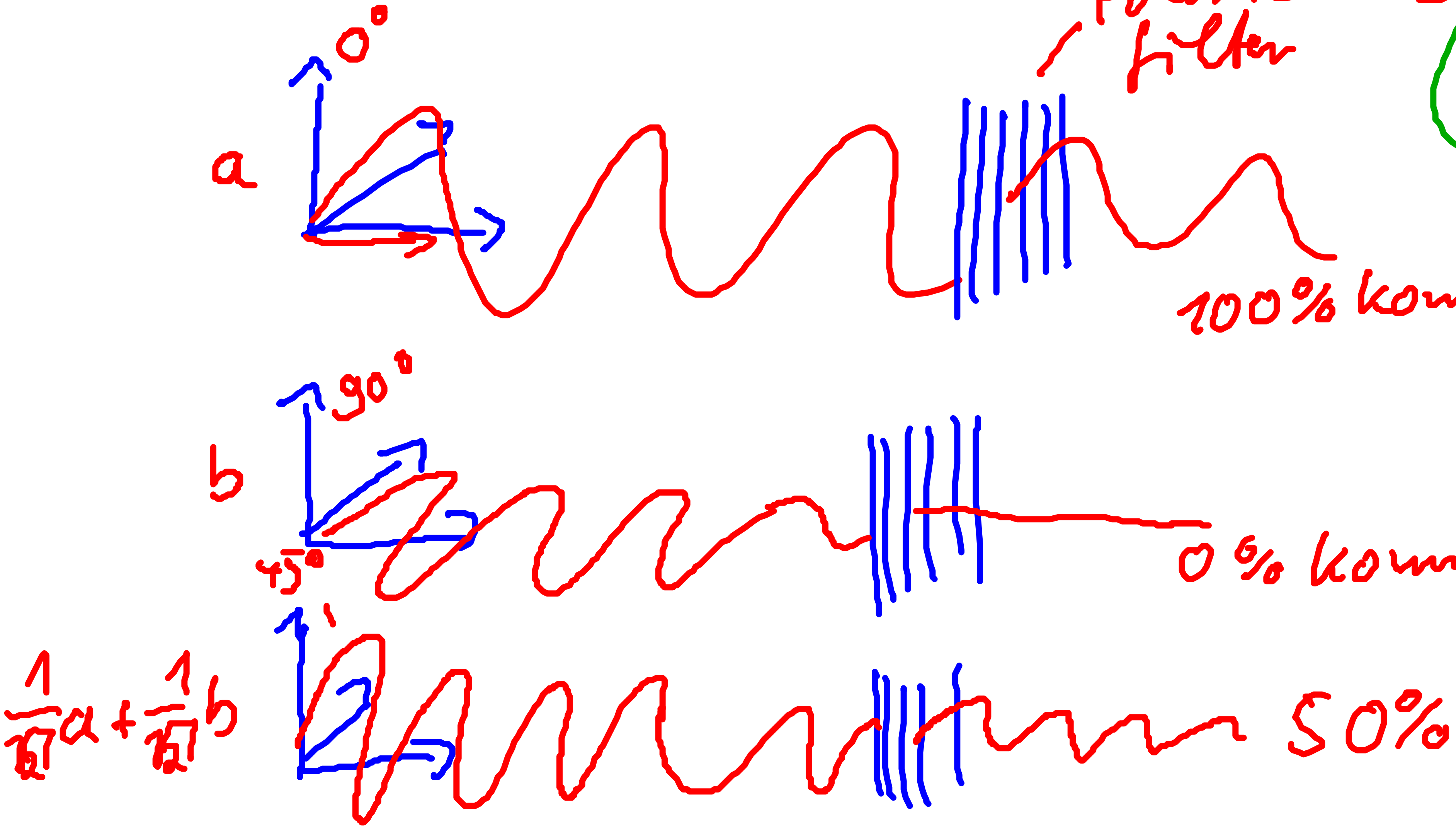
Exkurs: Geometrie der Quantenmechanik

Achtung: Das ist kein Physikvorlesung

Objekte + Messungen:

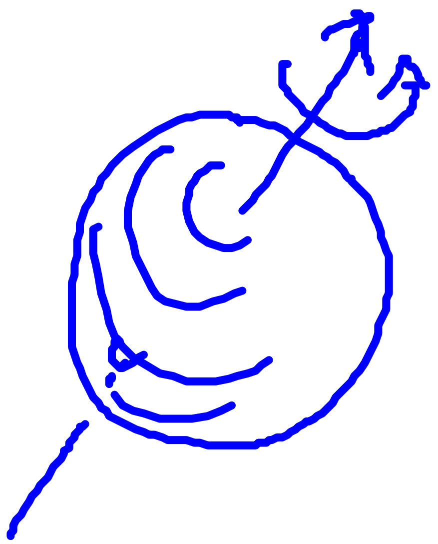
Photon

Jedes einzelne Photon kommt entweder durch oder nicht
Intensitätsminderung heißt WENIGER Photonen



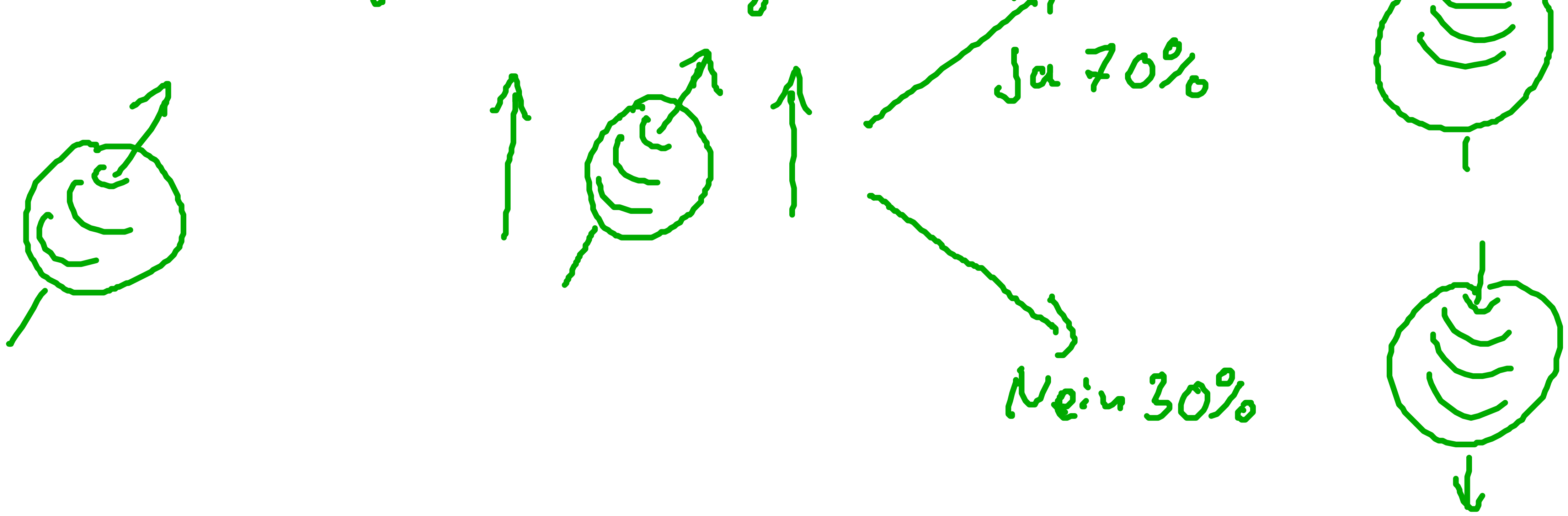
Elektronenspin:

Vereinfachtes Bild: Elektron ~ Kugel die um bestimmte Achse Rotiert



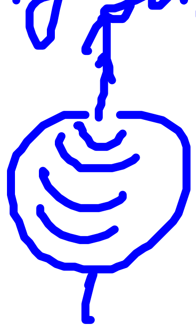
Messung: Hat Elektron gewisse Drehachse

Vor der Messung — Messung — Nach Messun



Typisch:

- Messungen werden mit Ja/Nein beantwortet
- Quantenzustände äußern in Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse
- Nach der Messung nimmt das Obj. den gemessenen Zustand an.
- Es gibt „entgegengesetzte Zustände"

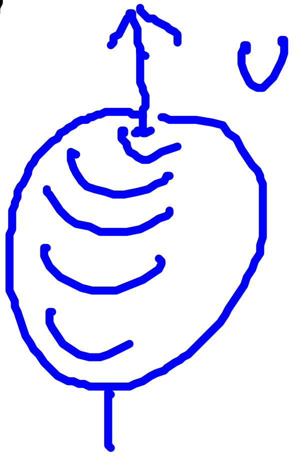
Spin  Up  Down

Photon ||| Polarisiert $|\uparrow\rangle$ ≡ Polarisiert $|\rightarrow\rangle$

- Sowohl Objekt als auch der Messung wird eine Richtung zugeordnet.

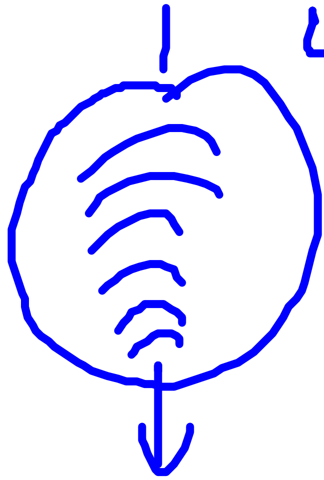
Basis aus „entgegengesetzte" Eigenschaften

Bsp: Elektronspin



Up

$= |1\rangle$



Down

$= |0\rangle$

Alle möglichen Orientierungen

Physikerschreibweise $a \cdot |1\rangle + b \cdot |0\rangle$ $\quad a, b \in \mathbb{C}$

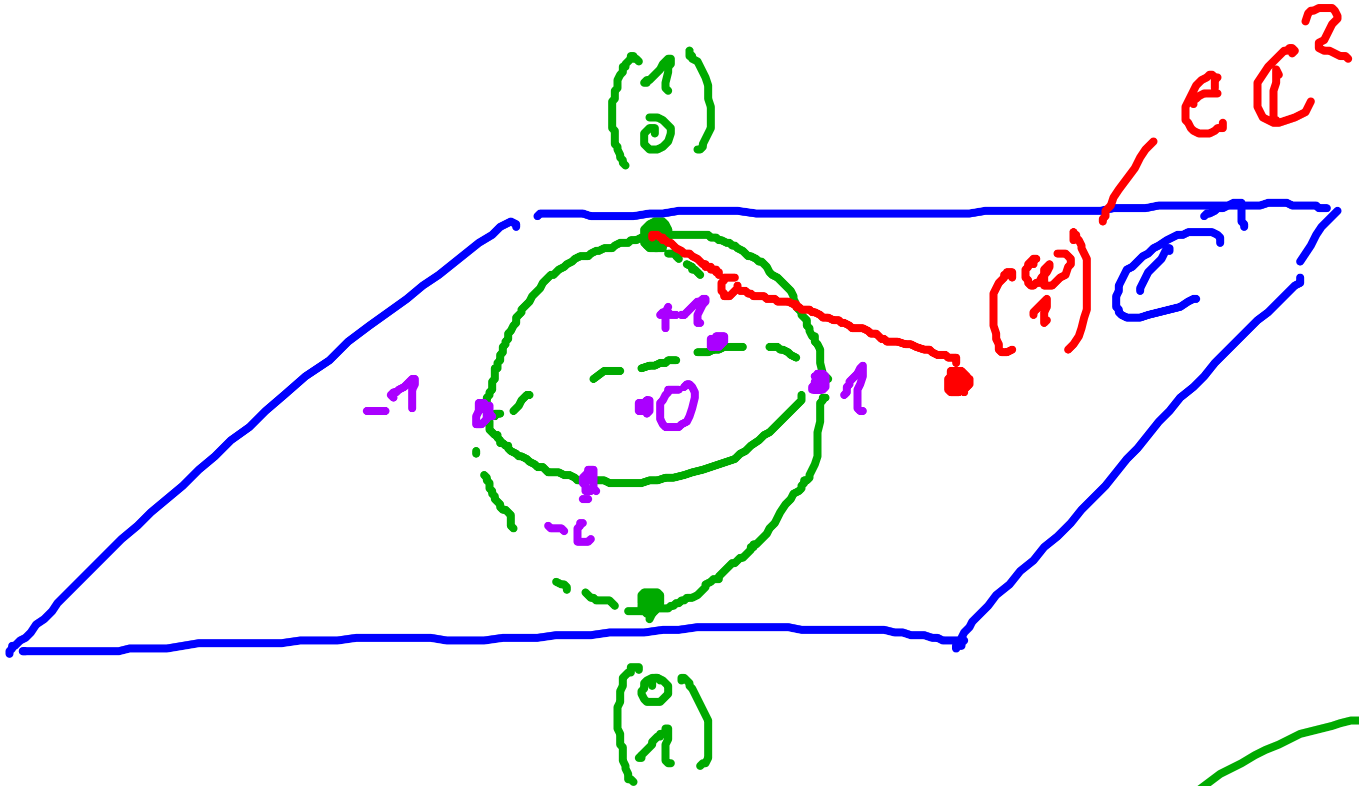
$|a|^2 + |b|^2 = 1$

Mathematikerschreibweise $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

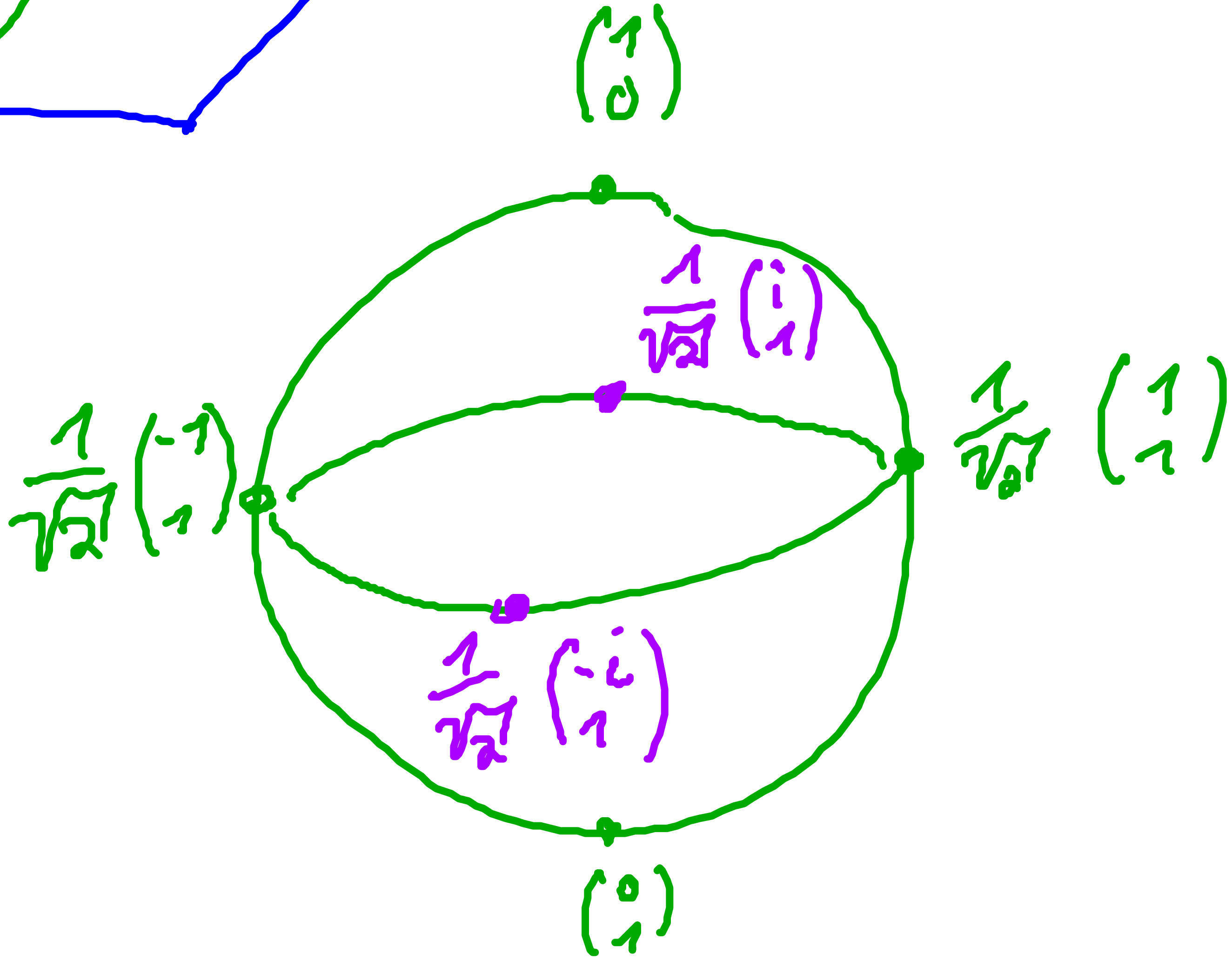
$$a \cdot |1\rangle + b \cdot |0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = v \qquad \|v\| = 1$$

Geometrie!



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\in \mathbb{C}^2$
$\begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{C}$
-1
$+i$
0
1
$-i$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Messungen: Auch Messungen haben eine Richtung

Physikerschreibweise

$\uparrow\uparrow\uparrow = |1\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Up-Messung

$\downarrow\downarrow\downarrow = |0\rangle \hat{=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Down-Messung

Allgemeine Messung

$|\varphi\rangle = a\cdot|1\rangle + b\cdot|0\rangle$

$= \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$|a|^2 + |b|^2 = 1$

Typographischer Trick

$\langle\varphi| := \left(\overline{|\varphi\rangle}\right)^T = (\bar{a}, \bar{b})$

Messung $\langle\varphi|$ angewandt auf Teilchen $|\psi\rangle$

$\langle\varphi|\cdot|\psi\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle$

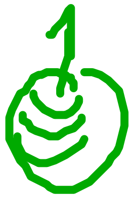
bra - ket

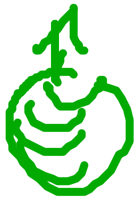
Hermitesches Skalarprodukt

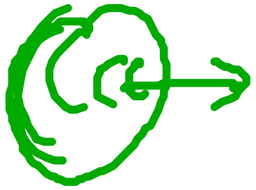
Wahrscheinlichkeit für „JA"

$= |\langle\varphi|\cdot|\psi\rangle|^2$

Beispiele

$\uparrow\uparrow\uparrow$  $\langle 1|\cdot|1\rangle = (1,0)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1 \Rightarrow 100\%$ JA

$\downarrow\downarrow\downarrow$  $\langle 0|\cdot|1\rangle = (0,1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0\%$ JA

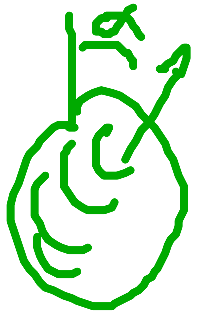
$\uparrow\uparrow\uparrow$  $\langle 1|\cdot|\psi\rangle = (1,0)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 50\%$ JA

$\langle 1|$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)=|\psi\rangle$

$\uparrow\uparrow\uparrow$  $\langle 1|\cdot|\psi\rangle = (1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{i\alpha}\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{i\alpha}$ 50% JA

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\alpha}|1\rangle\right)$

$\uparrow\uparrow\uparrow$



$$|\psi\rangle = \cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cdot|1\rangle + \sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cdot|0\rangle$$

$$\Rightarrow |\langle 1|\cdot|\psi\rangle|^2 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftarrow \text{Wahrsch für „Ja"}$$

Die Wahrscheinlichkeit hängt nur vom „Winkel" α zwischen $\langle\varphi|$ und $|\psi\rangle$ ab

Wahrsch $= \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$

Bemerkung   Messoperator $= |\varphi\rangle\cdot\langle\varphi|$

Vor der Messung   Nach Messung

$$|\psi\rangle \rightsquigarrow \overbrace{\underbrace{|\varphi\rangle}_{\text{Neue Richtung}}\,\langle\varphi|}^{\text{Matrix}}\cdot|\psi\rangle$$

Wahrsch

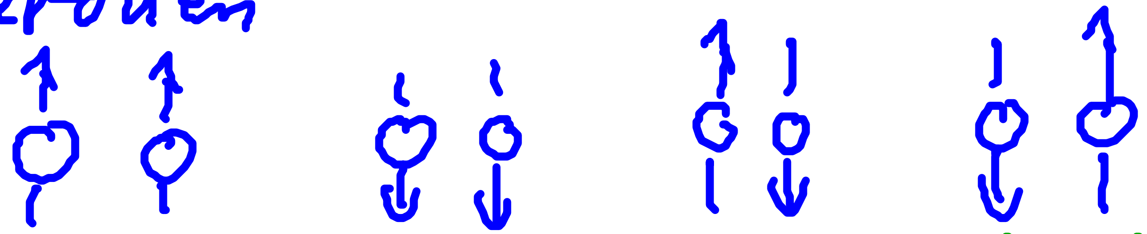
$\boxed{|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle =: |\psi_1 \psi_2\rangle}$

Mehrere „Qubits"

1 Qubit ~ 1 Elektron ~ $a|1\rangle + b|0\rangle = |\psi\rangle$

2 Qubits ~ 2 Elektronen

Grundzustände:



$|11\rangle \quad |00\rangle \quad |10\rangle \quad |01\rangle$

2 Messungen ⇒ Vier Alternativen schließen sich gegenseitig aus.

⇝ Zustand des Gesamtsystems $\in$ 4-dimensional VR über $\mathbb{C}$

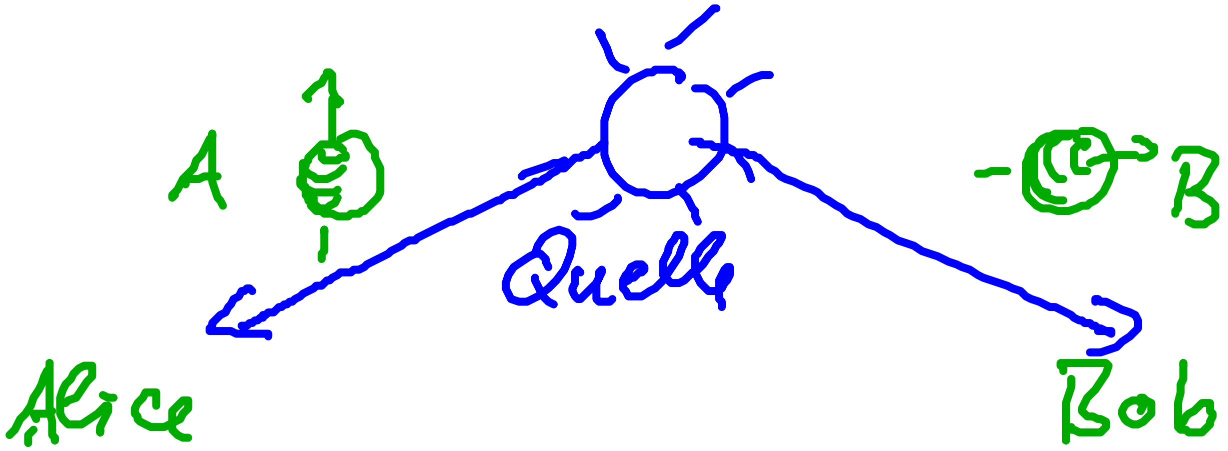
$$|\psi\rangle = a\cdot|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d\cdot|11\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$$

Messung ebenfalls aus $\mathbb{C}^4$

$$\begin{tikzcd} |10\rangle_c \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, "a"'] & |11\rangle_d \arrow[d, dash, "b"] \\ |00\rangle \arrow[r, dash] & |01\rangle \end{tikzcd}$$

Spezielles Scenario



$$\begin{array}{ccccc} c & — & d & \to & c+d \\ | & & | & & \\ a & — & b & \to & a+b \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ a+c & & b+d & & \end{array}$$

Zustand beider Elektronen $\in \mathbb{C}^4$ $\quad a\cdot|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$

Alice hat Elektron A $= (a+b)\,|0\rangle + (c+d)\,|1\rangle$

Bob hat Elektron B $= (a+c)\,|0\rangle + (b+d)\,|1\rangle$

Alices Freiheit (Messgerätdrehen) $\quad \tilde{A} \in SU(2)$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \mapsto \left(\tilde{A}\cdot\begin{pmatrix} c \\ a \end{pmatrix}, \tilde{A}\begin{pmatrix} d \\ b \end{pmatrix} \right)$$

$$X \to \tilde{A}\cdot X$$

Bobs Freiheit $\quad \tilde{B} \in SU(2)$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (c,d)\cdot\tilde{B} \\ (a,b)\,\tilde{B} \end{pmatrix} \quad X\cdot\tilde{B}$$

Kann Bob durch seine Messung auf Alices Ergebnis schließen

Bsp $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$ $\qquad Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Messungen	$\langle 00 \vert$	$\langle 10 \vert$	$\langle 01 \vert$	$\langle 11 \vert$	
X	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	← unverschränkt
Y	$1/2$	0	0	$1/2$	← verschränkt

In beiden Fällen messen Alice und Bob „Up" mit Wahrsch $1/2$

Aber: im ersten Fall sind die Ergebnisse unabhängig

im zweiten Fall messen beide genau das gleiche