TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)

— Aufgabenblatt 12 (20. Juli 2006) —

— *Präsenzaufgaben* —

Z 81.

1. Zeigen Sie: Das (orientierte) Volumen V eines Tetraeders mit den Ecken $p_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ $(1 \leq i \leq 4)$ ist $V = \frac{1}{6} det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (kurz: $\frac{1}{6} det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$).
   Wie lässt sich die Entwicklung dieser Determinante nach der letzten Zeile deuten?

2. Die Punkte $p_1 = (0,0,0)^T$, $p_2 = (1,1,-1)^T$, $p_3 = (3,0,0)^T$, $p_4 = (1,1,2)^T$ und $p_5 = (0,3,0)^T$ seien die Ecken eines Polyeders mit den Kanten p_1p_2, p_1p_3, p_1p_4, p_1p_5, p_2p_3, p_2p_4, p_2p_5, p_3p_4 und p_4p_5.
   Zeigen Sie, dass $\frac{1}{6} \left(det \begin{pmatrix} p_2 & p_3 & p_1 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} p_1 & p_3 & p_4 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} p_4 & p_3 & p_2 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \right.$ $\left. + det \begin{pmatrix} p_4 & p_2 & p_5 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} p_5 & p_2 & p_1 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} p_4 & p_5 & p_1 & q \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ unabhängig von der Wahl von q das Volumen des Polyeders liefert.
   Verifizieren Sie dies mit $q = (3,3,0)$, $q = p_1$ und $q = p_3$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $x \mapsto f(x) := Mx + t$ eine (affine) Abbildung mit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Bestimmen Sie das Volumen des Bildes obigen Polyeders unter dieser Abbildung.

— *Informationen* —

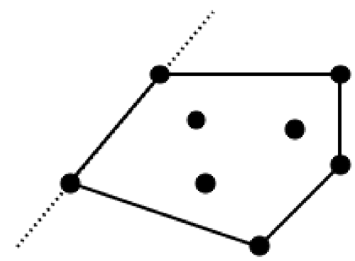
- Die Semestralprüfung zu dieser Vorlesung findet am Mittwoch, den 26.07.2006, um 16:15 Uhr in MW 0001, MI HS 1 statt.
- Um sicher zu stellen, dass Sie eine Sitzplatz bei der Klausur haben, melden Sie sich bis spätestens 20.07.2006 unter
  https://www-m10.ma.tum.de/klausuranmeldung an. Bei dieser Anmeldung entstehen Ihnen keinerlei Nachteile.
- Die Zuordnung, wer in welchem Raum schreibt, wird auf der linearen Algebra Homepage veröffentlicht.
- Zulässige Hilfsmittel sind: Stifte (**kein** Rot, **kein** Grün, **kein** Tintenkiller, **kein** Tipex), Lineal/Geodreieck und **ein** selbst erstelltes DIN A4 Blatt (evtl. beidseitig beschrieben)
  Insbesondere sind Taschenrechner, Handies, Laptops **nicht** erlaubt.
- Rucksäcke sind beim Betreten des Klausurraums unten vor der Tafel (mit abgeschaltetem Handy) abzustellen.
- **Mitbringen:** Studentenausweis und amtlichen Lichtbildausweis!
- Klausureinsicht und Scheinvergabe findet **NUR** am 04.08.2006 von 13 bis 17 Uhr statt!
  Bitte bringen Sie hierzu einen amtlichen Lichtbildausweis mit!
  Sollten Sie zu diesem Termin verhindert sein, dann füllen Sie bitte untenstehende Vollmacht aus und geben diese einem Komilitonen, der sich ausweisen kann, mit.

P 82. Sei X eine Teilmenge eines reellen Vektorraums V, dann heißt

$$conv(X) = \bigcap_{\substack{X \subseteq H \subseteq V \\ Halbraum H}} H$$

die konvexe Hülle von X.
Alternativ lässt sich die konvexe Hülle von X auch als die Menge aller endlichen Konvexkombinationen von Elementen aus X auffassen:

$$conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; x_i \in X, n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 (\forall i) \right\}$$



Sei nun $X = \{A, B, C, D, E, F, G\} \subset \mathbb{R}^2$. Relative Positionen der Punkte A bis G sind durch untenstehende Vorzeichen von Determinanten gegeben. Dabei bezeichnet $a = (x_A, y_A, 1)$, $b = (x_B, y_B, 1)$, ...
und $\chi(uvw) = sgn(det(uvw))$:

$\chi(abc)) = -1$	$\chi(abd) = +1$	$\chi(abe) = +1$	$\chi(abf) = +1$	$\chi(abg) = -1$
$\chi(acd) = +1$	$\chi(ace) = +1$	$\chi(acf) = +1$	$\chi(acg) = -1$	$\chi(ade) = +1$
$\chi(adf) = +1$	$\chi(adg) = -1$	$\chi(aef) = +1$	$\chi(aeg) = -1$	$\chi(afg) = -1$
$\chi(bcd) = +1$	$\chi(bce) = +1$	$\chi(bcf) = +1$	$\chi(bcg) = -1$	$\chi(bde) = +1$
$\chi(bdf) = -1$	$\chi(bdg) = +1$	$\chi(bef) = -1$	$\chi(beg) = +1$	$\chi(bfg) = +1$
$\chi(cde) = +1$	$\chi(cdf) = -1$	$\chi(cdg) = +1$	$\chi(cef) = -1$	$\chi(ceg) = +1$
$\chi(cfg) = +1$	$\chi(def) = -1$	$\chi(deg) = +1$	$\chi(dfg) = -1$	$\chi(efg) = -1$

Welche Punkte aus X liegen auf dem Rand von $conv(X)$?
Was ändert sich, wenn $det(aef) = 0$ gilt?

Vollmacht

(Abholer) ____________________ ist berechtigt, an Stelle von

(eigener Name) ____________________

(Matrikelnummer: (eigene Mtr.nr.) ____________________),
den Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 - Schein entgegenzunehmen.

(Ort, Datum, Unterschrift) ____________________