TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)
— Aufgabenblatt 10 (06. Juli 2006) —

— *Präsenzaufgaben* —

Z 68. Wir zeigen den Satz aus der Vorlesung:
Für alle $n \times n$ Matrizen A, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt, gilt: $\exists\ T \in O(n)$: $T^T AT = D$ mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix D.

P 69. Sei $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle Transformationen $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, für die A zu sich selbst ähnlich ist, d.h. $T^{-1}AT = A$ gilt.

P 70. Sei A eine $n \times n$ Matrix, deren charakteristisches Polynom $\chi_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt.

1. Zeigen Sie, dass für alle Eigenwerte λ von A gilt: Die Zahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ ist gleich $dim(Kern(A - \lambda E))$.
2. Zeigen Sie allgemeiner für $s \geq 1$: Die Zahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ, die mindestens die Größe $s \times s$ haben, ist $dim(Kern(A - \lambda E)^s) - dim(Kern(A - \lambda E)^{s-1})$.

P 71. Verifizieren Sie die Ergebnisse aus P 69 an Hand der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 &&&&&&& \\ & 2 & 1 &&&&& \\ && 2 &&& \mathbf{0} && \\ &&& 2 &&&& \\ &&&& 2 & 1 && \\ && \mathbf{0} &&& 2 & 1 & \\ &&&&&& 2 & \\ &&&&&&& 2 \end{pmatrix}$.

— *Hausaufgaben* —

H 72. Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in O_n$ ist zu einer Matrix A, der Gestalt $\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \mathbf{0} \\ && 1 &&&& \\ &&& \pm 1 &&& \\ &&&& D_1 && \\ & \mathbf{0} &&&& \ddots & \\ &&&&&& D_k \end{pmatrix}$, ähnlich, wobei für alle i $(1 \leq i \leq k)$ $D_i \in O_2$ eine Drehmatrix ist.

H 73. Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist zu ihrer Transponierten A^T ähnlich.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es reicht, die Aussage für Matrizen in Jordan-Normalform zu zeigen.

H 74. Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ $\sim$ mit $A \sim B \Leftrightarrow A$ ist ähnlich zu B eine Äquivalenzrelation darstellt.
Wie viele verschiedene Ähnlichkeitsklassen von 6×6 Matrizen mit sechsfachem Eigenwert λ gibt es?
Geben sie aus jeder Ähnlichkeitsklasse einen Repräsentanten an.

Abgabetermin ist der 13.07.2006 bis 12 Uhr im Briefkasten.
Bitte melden Sie sich über die Vorlesungshomepage zur Semestrale zwischen dem 10.07. und 20.07. an!