PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)

— Aufgabenblatt 9 (29. Juni 2006) —

— *Präsenzaufgaben* —

Z 60. Im $\mathbb{R}^2$ seien die Punkte $p_1 = (0;0)$, $p_2 = (2;0)$, $p_3 = (0;2)$, $p_4 = (2;2)$, $p_5 = (u;1)$ $(u \in \mathbb{R})$ gegeben. Bestimmen Sie die Quadrik Q mit der Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, welche die Punkte p_1 bis p_5 enthält. Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist Q ein Kreis?
Zusatz: Welche Bedingungen an eine Quadrikgleichung $Q: \; x^T Ax + 2b^T x + c = 0$ im $\mathbb{R}^n$ müssen gelten, damit Q eine Hypersphäre beschreibt?

P 61. Untersuchen Sie für $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ die Gestalt folgender Kegelschnitte Q_λ in $\mathbb{R}^2$ und geben Sie die zugehörigen Hauptachsenformen an.

$$a) \quad Q_\lambda: \quad y^2 - xy + \lambda = 0 \qquad\qquad b) \quad Q_\lambda: \quad x^2 + 4y^2 - 4x + 12y + 13 + \lambda = 0$$

P 62. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ das Ebenenpaar v, w durch den Ursprung mit den Normalenvektoren n und m.

1. Stellen Sie eine Quadrikgleichung $q(x) = x^T Ax = 0$ mit einer Rang-1-Matrix A auf, welche v und w als Nullstellenmenge besitzt.
2. Schreiben Sie die Quadrikgleichung $q(x) = 0$ mit Hilfe einer symmetrischen Matrix, d.h. $q(x) = x^T Sx = 0$ mit $S = S^T$.
3. Zeigen Sie: $A - S$ ist schiefsymmetrisch. Interpretieren Sie die wesentlichen Komponenten von $A - S$ geometrisch?

P 63. Sei Q eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$ (Q nicht punktförmig) mit der Gleichung $x^T Ax + 2b^T x + c = 0$ und A symmetrisch. Zeigen Sie: Q ist genau dann zentralsymmetrisch, wenn $Ax = -b$ lösbar ist.

— *Hausaufgaben* —

H 64. Zeigen Sie: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) nilpotent $\quad\Longrightarrow\quad spur(A) = 0$.

H 65. Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt f¸r die geometrische Vielfachheit $g(\lambda)$ und die algebraische Vielfachheit $r(\lambda): \quad 1 \le g(\lambda) \le r(\lambda) \le n$.

H 66. Gegeben seien die beiden Quadriken Q_1 und Q_2 im $\mathbb{R}^3$:

$$Q_1: \quad xy + yz + xz = 1 \qquad\qquad Q_2: \quad 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4xy - 4yz + 2x + 2y + z + 3 = 0$$

1. Schreiben Sie Q_1 und Q_2 in der Gestalt $x^T Ax + 2b^T x + c = 0$ mit $A^T = A$.
2. Bestimmen Sie für Q_1 und Q_2 die Hauptachsenform mit den zugehörigen Koordinatentransformationen.

H 67. Durch $x^T Ax + 2b^T x + c = 0$ (o.E. $A = A^T$) sei eine Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, die einen Punkt $p = (p_1, ..., p_n)^T$ mit $p_i \neq 0 \quad \forall i, 1 \le i \le n$ enthält. Zeigen Sie:
Q ist genau dann symmetrisch zu allen Koordinatenhyperebenen, wenn A eine Diagonalmatrix und $b = 0$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Punkte $p, 2p_ie_i - p, p - 2p_ke_k, 2p_ie_i + 2p_ke_k - p, i \neq k$ mit der kanonischen Basis $e_1, ..., e_n$ des $\mathbb{R}^n$.

Abgabetermin ist der 06.07.2006 bis 12 Uhr im Briefkasten.