TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)
— Aufgabenblatt 8 (22. Juni 2006) —

— Präsenzaufgaben —

P 51. $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ seien invertierbare Matrizen mit n linear unabhängigen Eigenvektoren. Drücken Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen durch die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B aus:
$rA\ (r \neq 0)$, $\quad A^k\ (k \in \mathbb{N})$, $\quad A^{-1}$, $\quad B^{-1}AB$, $\quad A^T$
Was ändert sich, wenn A, B keine n linear unabhängigen Eigenvektoren besitzen?

P 52. Berechnen Sie zu $A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & -2 \\ 12 & -7 & -2 \\ 18 & -12 & -2 \end{pmatrix}$ eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ derart, dass $B^{-1}AB$ Diagonalgestalt hat.

P 53. Eine $n \times n$-Matrix A heißt nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, für das A^k die Nullmatrix ergibt.
Die Exponentialabbildung für eine komplexe $n\times n$-Matrix A wird (genau wie über den reellen Zahlen) definiert durch

$$\exp(A) := e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

(Die Konvergenz dieser Reihe können Sie voraussetzen sowie: $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$.)

$$\text{Sei} \qquad A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & \ddots & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie: A_0 ist nilpotent.
2. Berechnen Sie $C(t) = e^{tA_0}$.
3. Berechnen Sie e^{A_λ}.

P 54. Zeigen Sie: Ist eine $n \times n$-Matrix A zu einer oberen Dreiecksmatrix R mit Nulleinträgen in der Diagonalen ähnlich, dann ist A nilpotent. (A ist zu R ähnlich, falls eine invertierbare $n \times n$-Matrix B existiert, mit $B^{-1}AB = R$.)

— *Hausaufgaben* —

H 55. Sei $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1-i & 0 & 1-i \\ -1-i & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & -1-i \\ 1-i & 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie die Eigenwerte von A, A^2, A^3 und A^4 sowie die Matrix A^4.

H 56. Sei A eine $n \times n$-Matrix (reell oder komplex) mit dem charakteristischen Polynom $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{s}(\lambda_i - \lambda)^{r_i}$ und $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$ $(1 \leq i, j \leq s)$ sowie $\sum_{i=1}^{s} r_i = n$ $(r_i, s \in \mathbb{N})$.
Zeigen Sie: $\forall i:\ dim(Kern(A - \lambda_i E)) = r_i \quad \Longrightarrow \quad A$ ist diagonalisierbar.

H 57. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie: AB und BA haben die selben Eigenwerte.

H 58. Welche der Matrizen aus Aufgabe H48 sind mittels Matrizen bestehend aus Eigenvektoren diagonalisierbar? Geben Sie gegebenfalls die jeweilige Diagonalmatrix und die zugehörige Transformationsmatrix an.

H 59. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

1. Diagonalisieren Sie A, d.h. bestimmen Sie $A = T^{-1}DT$ mit Transformationsmatrix T und Diagonalmatrix D.
2. Berechnen Sie A^{10}.
3. Berechnen Sie e^A, zeigen Sie dazu: $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^A T$.
4. Geben Sie zwei verschiedene Matrizen $B_1, B_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ an, für die $B_1^3 = A = B_2^3$ gilt.

Abgabetermin ist der 29.06.2006 bis 12 Uhr im Briefkasten.