TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)

— Aufgabenblatt 6 (08. Juni 2006) —

— Präsenzaufgaben —

P 41. Bestimmen Sie alle Drehmatrizen des $\mathbb{R}^{3\times 3}$ der Form $\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

P 42. Gegeben sei die unitäre Matrix $A = \begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib \end{pmatrix} \in SU_2$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A und zeigen Sie, dass für $|a| \neq 1$ die Eigenvektoren aufeinander senkrecht stehen.

2. Diskutieren Sie die Abhängigkeit dieser Eigenwerte und Eigenvektoren von den Parametern a, b, c, d und zeigen Sie einen Zusammenhang der Matrix A mit einer Drehung im $\mathbb{R}^3$ auf.

P 43. Zeigen Sie: Die Menge der spurfreien hermiteschen Matrizen $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist isomorph zum Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

— Hausaufgaben —

H 44. Gegeben sei die Matrix $S = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie: S ist eine Spiegelungsmatrix

2. Bestimmen Sie die Spiegelebene a.

3. Bestimmen Sie eine Transformation $x \mapsto Tx$ ($T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$) so, dass $T^{-1}DT$ eine Spiegelung an der Ebene $x = 0$ darstellt.

H 45. In $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei die gebrochen rationale Abbildung

$$f_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \qquad \text{mit} \qquad \omega \mapsto f_A(\omega) = \frac{r\omega + s}{-\overline{s}\omega + \overline{r}}$$

mit unitärer Matrix $A = \begin{pmatrix} r & s \\ -\overline{s} & \overline{r} \end{pmatrix} \in SU_2$ ($r, s \in \mathbb{C}$) gegeben.

1. Zeigen Sie: $f_A : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ist bijektiv.

2. Zeigen Sie: $M = \{f_A \mid A \in SU_2\}$ bildet mit der Abbildungskomposition eine Gruppe.

3. Ist M isomorph zur SU_2?

H 46.

1. Welche Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} \in \{0,1\}$ $(\forall i, j)$ liegen in O_n?
2. Zeigen Sie: $M = \{A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in O_n \mid a_{ij} \in \{0,1\}, \forall i, j\}$ bildet mit der Matrixmultiplikation $\cdot$ eine Gruppe.
3. Zu welcher (aus der linearen Algebra 1 Vorlesung bekannten) Gruppe ist $(M, \cdot)$ isomorph?

H 47. Seien $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ Koordinatenvektoren in der Quaternionenbasis $\{1, \mathbb{I}, \mathbb{J}, \mathbb{K}\}$.

1. Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $R = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = P \cdot Q$ für das Produkt der Koordinatenvektoren P und Q in der Quaternionenbasis.
2. Zeigen Sie: Für $a = t = 0$ ist $p = -\left\langle \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle$ und $\begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.
3. Was ergeben $\frac{PQ+QP}{2}$ und $\frac{PQ-QP}{2}$ allgemein und speziell bei $a = t = 0$?

Abgabetermin ist der 14.06.2006 bis 18 Uhr im Briefkasten.