



Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)

— Aufgabenblatt 5 (01. Juni 2006) —

— Präsenzaufgaben —

Z 36. QR-Zerlegung nach Householder

Mit Hilfe von geeigneten Spiegelungsmatrizen lässt sich eine QR-Zerlegung einer Matrix $A = QR$ gewinnen. Derartige Zerlegungen finden Anwendung beim Lösen von linearen Gleichungssystemen und Minimierungsaufgaben $\min \|Ax - b\|_2$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$).

Bestimmen Sie das Minimum $\min \|Ax - b\|_2$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}$ unter Verwendung einer

QR-Zerlegung von A .

— Hausaufgaben —

H 37. In der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 sind die Punkte $A = (0, 0)$, $B = (0, -4)$, $C = (-3, -4)$, $D = (5, 0)$, $E = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ gegeben.

1. Zeigen Sie, dass die Dreiecke $\Delta_1 = (A, B, C)$ und $\Delta_2 = (D, E, A)$ kongruent sind, d.h. dass entsprechende Seitenlängen übereinstimmen.
2. Bestimmen Sie die Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(x) = Mx + t$ ($M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $t \in \mathbb{R}^2$) mit $\gamma(A) = D$ und $\gamma(B) = E$ und $\gamma(C) = A$.
3. Zeigen Sie, dass γ eine Gleitspiegelung ist und geben Sie deren Spiegelachse g und deren Translationsvektor $s \parallel g$ an.

Hinweis: Suchen Sie die Fixgerade $g : x = u + \lambda r$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) mit $\gamma(g) = g$ und Aufpunkt $u = (\xi, 0)$.

H 38. Zeigen Sie: Alle reellen Drehmatrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ besitzen die selben komplexen Eigenvektoren.

H 39. Gegeben sei die Matrix $D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie: D ist eine Drehmatrix
2. Bestimmen Sie die Drehachse p und den Drehwinkel φ der Drehung $\delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\delta(x) = Dx$.
3. Bestimmen Sie eine Transformation $x \mapsto Tx$ ($T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) so, dass $T^{-1}DT$ eine Drehung um die x-Achse darstellt.

H 40. Bestimmen Sie das Minimum $\min \|Ax - b\|_2$ mit $A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 25 \\ 0 & 27 & 18 \\ 4 & 8 & 13 \\ -4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 46 \\ 0 \\ 43 \\ 2 \end{pmatrix}$ unter Verwendung

einer QR-Zerlegung.

Abgabetermin ist der 08.06.2006 bis 12 Uhr im Briefkasten.