TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)
— Aufgabenblatt 4 (18. Mai 2006) —

— *Präsenzaufgaben* —

Z 25. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sei bezüglich des Standardskalarprodukts eine Gerade a durch ihre Hessenormalform $a : -x_1 \sin(\alpha) + x_2 \cos(\alpha) - d_0 = 0$ gegeben ($\alpha \in \mathbb{R}$, $d_0 \in \mathbb{R}$).

1. Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunkts $P' = (x_1', x_2')$ von $P = (x_1, x_2)$ bei Achsenspiegelung σ_a an der Geraden a. ($PP' \perp a$, $d(P', a) = d(P, a)$, $P' \neq P$)
2. Zeigen Sie: Die Komposition von zwei Achsenspiegelungen σ_a und σ_b ist die Identität, eine Translation oder eine Drehung.
3. Zeigen Sie: Die Komposition von $2n$ Achsenspiegelungen ($n \in \mathbb{N}^*$) bilden eine Gruppe.
4. Zeigen Sie: Die Komposition von drei Achsenspiegelungen ist eine Achsen- oder eine Gleitspiegelung.
5. Zeigen Sie: Die Achsenspiegelungen des $\mathbb{R}^2$ erzeugen die Bewegungsgruppe der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

P 26. Bestimmen Sie sämtliche zu $(1, i, 0)^T$ und $(0, i, -i)^T$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts senkrecht stehende Vektoren $v \in \mathbb{C}^3$ mit $\|v\| = 1$.

P 27. Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ik})_{ik} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist definiert durch $spur(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen $(p \times q)$-Matrizen ($p, q \in \mathbb{N}$) und $s : V \times V \to \mathbb{C}$ definiert durch
$s(A, B) := spur(A^T \overline{B})$.

1. Zeigen Sie: s ist eine Sesquilinearform.
2. Zeigen Sie: s ist positiv definit.
3. Zeigen Sie: s ist hermitesch.
4. Zeigen Sie: s ist ein Skalarprodukt.
5. Die zu s gehörende Norm heißt Frobeniusnorm.
   Zeigen Sie: Die Frobeniusnorm ist submultiplikativ, d.h. es gilt $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$ ($A \in \mathbb{C}^{p \times q}$, $B \in \mathbb{C}^{q \times r}$).
   Hinweis: Zeigen Sie für Spaltenvektoren a_j, b_j gilt: $\|a_j b_j^T\|_F^2 = \|a_j\|_2^2 \|b_j\|_2^2$.

Sei nun W der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen $(p \times q)$-Matrizen ($p, q \in \mathbb{N}$) und $s' : W \times W \to \mathbb{R}$ die Einschränkung von s auf $W \times W$.

6. Ist s' ein Skalarprodukt auf W? (Begründung!)

M 28. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und die Abbildung $f : V \to \mathbb{C}$ linear. Sind die folgenden Abbildungen Sesquilinearformen?

☐ $g : V \times V \to \mathbb{C}$ mit $(x, y) \mapsto g(x, y) := f(x) + \overline{f(y)}$

☐ $h : V \times V \to \mathbb{C}$ mit $(x, y) \mapsto h(x, y) := f(x) \cdot \overline{f(y)}$

P 29. Sei $s : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ mit $s(x,y) = x^T \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \overline{y}$ sowie $a = (1,0,i)^T$ und $b = (1,i,1)^T$.

1. Zeigen Sie: s ist ein Skalarprodukt.
2. Berechnen Sie den Abstand von a und b einmal bezüglich s und einmal bezüglich des kanonischen Skalarprodukts.
3. Bestimmen Sie sämtliche Vektoren $v \in \mathbb{C}^3$ welche auf a und b einmal bezüglich s und einmal bezüglich des kanonischen Skalarprodukts senkrecht stehen.

— Hausaufgaben —

H 30. Zeigen Sie, dass in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt s die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$\forall x, y \in V : \qquad |s(x,y)|^2 = s(x,y)\overline{s(x,y)} \leq s(x,x)s(y,y)$$

H 31. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit den beiden Skalarprodukten S_1 und S_2. Zeigen Sie:

$$\forall x \in V : \quad S_1(x,x) = S_2(x,x) \qquad \Longrightarrow \qquad \forall x, y \in V : \quad S_1(x,y) = S_2(x,y)$$

H 32. Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Mit $(b_{ij})_{ij} = B := A^T \overline{A}$ werde eine Sesquilinearform $S : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch $S(x,y) := x^T B \overline{y}$.

1. Ist S hermitesch? (Begründung!)
2. Zeigen Sie: $b_{ii} \geq 0 \quad \forall i$.
3. Zeigen Sie: Die Determinante einer hermiteschen Matrix ist reell.
4. Zeigen Sie: B invertierbar $\quad \wedge \quad$ B hermitesch $\qquad \Longrightarrow \qquad$ B^{-1} hermitesch
5. Zeigen Sie: S ist genau dann positiv definit, wenn $rg(A) = n$
6. Ist S ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$?

H 33. Geben Sie für $U = span \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \overset{UVR}{\leq} \mathbb{C}^5$ bezüglich des kanonischen Skalarprodukts eine Orthonormalbasis an.

H 34. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Matrizen, wobei A hermitesch, B invertierbar und $B^T A \overline{B} = diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Zeigen Sie: $s : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ mit $s(x,y) = x^T A \overline{y}$ ist ein Skalarprodukt $\quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_i > 0 \; \forall i$

H 35. Weisen Sie nach, dass die unitären Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $det(A) = 1$ eine Gruppe, die $SU(n)$, bilden.

Abgabetermin ist der 01.06.2006 bis 12 Uhr im Briefkasten.