TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)
— Aufgabenblatt 3 (11. Mai 2006) —

— *Präsenzaufgaben* —

Z 18. Ebenen durch den Mittelpunkt einer Kugel mit Radius r schneiden die Kugeloberfläche in sogenannten Großkreisen, also in Kreisen mit Radius r. Mit Großkreisbögen kann man auf der Kugel Dreiecke (sphärische) Dreiecke bilden, Lote fällen, usw. Dabei ist der Abstand zwischen zwei Punkten die Länge des (kleineren) Bogens auf dem Großkreis durch die beiden Punkte und der Winkel zwischen zwei Großkreisen der Schnittwinkel der Großkreisebenen.

1. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Mittelsenkrechten in einem Punkt?
2. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Winkelhalbierenden in einem Punkt?
3. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Seitenhalbierenden in einem Punkt?
4. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Höhen in einem Punkt?

M 19. Welche der folgenden Aussagen sind für alle Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ wahr?

- ☐ $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$.
- ☐ $a \times b = b \times a$.
- ☐ $\langle a, b\rangle \perp a$.
- ☐ $a \times b \perp b$.
- ☐ $\det(a, b, a \times b) > 0$.
- ☐ $\left(\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)^2 + \left(\frac{\|a\|\cdot\|b\|}{\|a\times b\|}\right)^2 = 1$.
- ☐ $\left(\frac{\langle a,b\rangle}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)^2 + \left(\frac{\|a\times b\|}{\|a\|\cdot\|b\|}\right)^2 = 1$.

P 20. Bestimmen Sie zur Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Schmidt'schen Orthonormierungsverfahrens eine orthonormale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R mit positiven Diagonalelementen, so dass $B = QR$ gilt.

P 21. Eine Bewegung des $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (nicht notwendig linear) mit $\|T(a)-T(b)\| = \|a-b\|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

1. Translationen, d.h. Abbildungen der Form $T_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T_x(b) := b + x$ und orthonormale Abbildungen sind Bewegungen.
2. Ist T eine Bewegung mit $T(0) = 0$, so ist T linear und orthonormal.
3. Für jede Bewegung T gibt es eine Translation τ und eine orthonormale Abbildung σ, so dass $T = \tau \circ \sigma$.

— *Hausaufgaben* —

H 22. Welche rationalen Zahlen müssen für die Sterne eingetragen werden, damit die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & * \\ * & \frac{1}{3} & * \\ * & * & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ orthonormal wird? Geben Sie alle möglichen Lösungen an.

H 23. Beweisen Sie die Zusammenhänge aus der Vorlesung:

1. $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c$
2. $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$
3. $(a \times b) \times (c \times d) = det(a, b, d)c - det(a, b, c)d$
4. $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle\langle b, d\rangle - \langle b, c\rangle\langle a, d\rangle$

H 24. Die Innenwinkel Platonischer Körper:

1. Informieren Sie sich im Mathematikmuseum ix-quadrat oder bei Wikipedia unter *http://de.wikipedia.org/wiki/Platonische_Körper* darüber, was Platonische Körper sind.
2. Bestimmen Sie die Innenwinkel eines Würfels.
3. Bestimmen Sie die Innenwinkel eines Oktaeders.
   Hinweis: Die Seitenmitten eines Würfels sind die Ecken eines Oktaeders und umgekehrt.
4. Bestimmen Sie die Innenwinkel eines Tetraeders.
   Hinweis: Wählen Sie geeignete Würfelecken als Eckpunkte Ihres Tetraeders.
5. Einen Ikosaeder erhalten Sie bei geeigneter Wahl von $\lambda \in \mathbb{R}$ durch die 12 Ecken $(0, \pm1, \pm\lambda)$, $(\pm1, \pm\lambda, 0)$ und $(\pm\lambda, 0, \pm1)$. Bestimmen Sie λ und die Innenwinkel eines Ikosaeders.
6. Bestimmen Sie die Innenwinkel eines Dodekaeders.
   Hinweis: Die Seitenmitten eines Ikosaeders sind die Ecken eines Dodekaeders und umgekehrt.

Abgabetermin ist der 18.05.2006 bis 12 Uhr im Briefkasten.