TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)
— Aufgabenblatt 2 (04. Mai 2006) —

— *Präsenzaufgaben* —

Z 12. Ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $L = a + U$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zu einem affinen Teilraum L definiert man $\Delta L := \{l_1 - l_2 \mid l_1, l_2 \in L\}$, den zugehörigen Untervektorraum. Damit kann man auch die Dimension eines affinen Teilraums durch $dim(L) := dim(\Delta L)$ definieren.
Zu Punkten $a_1, a_2, ..., a_r \in \mathbb{R}^n$ sei $L(a_1, a_2, ..., a_r)$ der kleinste affine Teilraum, der diese Punkte enthält.

1. Zeigen Sie: $L(a_1, a_2, ..., a_r)$ existiert und ist explizit darstellbar durch:
   $L(a_1, a_2, ..., a_r) = a_1 + span(a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_r - a_1)$.

2. Seien nun $L = L(a_1, a_2, ..., a_r)$ gegeben mit $dim(L) = r - 1$ $(r > 1)$ und
   $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|a_i - x\| = \|a_j - x\|\ ,\ \forall 1 \leq i, j \leq r\}$.
   Zeigen Sie: M ist ein affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$ und es gilt $dim(M) + dim(L) = n$. Für alle $x \in \Delta M$ und alle $y \in \Delta L$ gilt $x \perp y$.

M 13. Entscheiden Sie, ob die angegebenen Abbildungen bilinear, positiv definit, symmetrisch oder gar Skalarprodukte sind.

☐ ☐ ☐ ☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x_1x_2 + y_1y_2$

☐ ☐ ☐ ☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2)$

☐ ☐ ☐ ☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

☐ ☐ ☐ ☐ $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^2 \cdot y^2$

☐ ☐ ☐ ☐ $f : \mathbb{R}^{2\times2} \times \mathbb{R}^{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(A, B) := (1, 1)A \cdot B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1, 1)B \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐ ☐ ☐ ☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2$

☐ ☐ ☐ ☐ $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := 2x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$

P 14. Der Schwerpunkt s eines Systems von n Massenpunkten $a_i \in \mathbb{R}^n$ mit den Massen $m_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ ist $s = \frac{a}{m}$ mit $a = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i a_i$ und $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$.

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \|x - a_i\|^2$, genau an der Stelle $x = s$ ein Minimum hat.

— *Hausaufgaben* —

H 15. In einem zweidimensionalen Vektorraum V mit Skalarprodukt s sei die Basis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2\}$ mit den Eigenschaften $\|b_1\|_s = 1$, $\|b_2\|_s = \sqrt{2}$ und dem Winkel (bzgl. s) $\angle_s(b_1, b_2) = \frac{3}{4}\pi$ gegeben.
Bestimmen Sie einen bzgl. s zu b_1 senkrechten Vektor $c \in V \backslash \{0\}$.

H 16. Im $\mathbb{R}^4$ seien zwei Geraden

$$g = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } h = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie die Punkte $A = (1, 0, 1, 1)$, $B = (2, -4, 1, 1)$, $C = (-1, -4, -1, -2)$ und $D = (0, 5, 2, 0)$ gegeben.

1. Bestimmen Sie den Orthogonalraum $H_1^\perp$ der von g und h aufgespannten Hyperebene H_1 sowie die Hesse-Normalform von H_1.
2. Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der durch A, B, C und D festgelegten Hyperebene H_2.
3. Geben Sie den geometrischen Ort aller Punkte an, die von H_1 und H_2 gleichen Abstand haben.

H 17. Gegeben seien die Punkte $(1; 0)$, $(2; 8)$, $(3; 14)$, $(4; 19)$ und $(5; 31)$.

1. Bestimmen Sie die Regressionsgerade durch diese Punkte.
2. Bestimmen Sie die Regressionsparabel durch diese Punkte.
3. Begründen Sie folgende Aussage: Der Schwerpunkt der Ausgangsdaten liegt immer auf der Regressionsgeraden.

Abgabetermin ist der 11.05.2006 bis 12 Uhr im Briefkasten.