PROF. DR.DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, DR. HERMANN VOGEL, PETER LEBMEIR

Lineare Algebra und analytische Geometrie 2 (SS 2006)
— Aufgabenblatt 1 (27. April 2006) —

— *Präsenzaufgaben* —

Z 1. Es sei $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ $(a,b \in \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Für $f,g \in \mathcal{C}$ sei

$$\langle f,g \rangle : \begin{cases} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \langle f,g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Raumes $\mathcal{P}_2([0,1],\mathbb{R})$ aller reellen Polynome auf dem Intervall $[0,1]$ mit maximalem Grad 2.
3. Zeigen Sie: Definiert man $g_m(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(mx)$ und $h_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)$ für $k,m \in \mathbb{N}$, so ist $\{g_m \mid m > 0\} \cup \{h_k \mid k > 0\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$.

P 2. Im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sei die Basis $\mathcal{B} = \{a_1, a_2\}$ gegeben.

1. Zeigen Sie: $s(x,y) := 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.
2. Man bestimme ein Skalarprodukt $s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto s(x,y) := x^T A y \end{cases}$ $(A \in \mathbb{R}^{2\times 2})$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ so, dass für die Vektoren $b_1 = 2a_1 + a_2$ und $b_2 = 5a_1 + 3a_2$ gilt:
   $s(b_1,b_1) = 1$,$s(b_2,b_2) = 1$ und $s(b_1,b_2) = 0$.

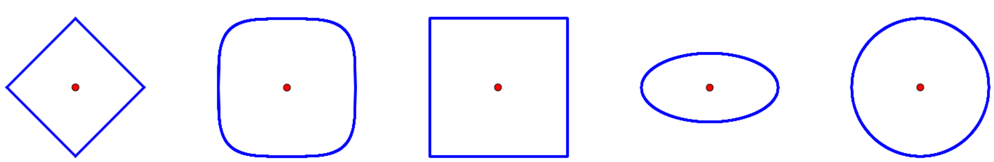
P 3. Für $1 \leq p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ seien $\|\ \|_p$ definiert durch

$$\|\ \|_p : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases} \quad \text{und} \quad \|\ \|_\infty : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|) \end{cases}.$$

$\|\ \|_p$ heißt p-Norm und $\|\ \|_\infty$ Maximumsnorm. Prüfen Sie die Normeigenschaften für $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ und $\|\ \|_\infty$ nach.

P 4.

1. Die dargestellten Linien um den jeweiligen zentralen Punkt z entsprechen der Punktmenge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - z\|_p = 1\}$, wobei $p \in \{1,2,4,\infty,E\}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ sei $\|x\|_E$ definiert durch $\|x\|_E := \sqrt{x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x}$. Ordnen Sie jedem Bild ein $p \in \{1,2,4,\infty,E\}$ zu.



2. Gegeben seien die Punkte $A = (0; 0)$ und $B = (3; 1)$ in der Ebene. Skizzieren Sie die Punkte der Ebene, welche von A und B gleichen Abstand bzgl. der oben genannten Normen haben. Wie sieht es mit Punkten gleichen Abstands zwischen A und $C = (\frac{1}{2}; 0)$ bzgl. der max-Norm aus?

P 5. Es seien die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_r \in \mathbb{R}^n$ gegeben, mit $r \leq n$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. $v_1, v_2, ..., v_r$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$.
2. Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\qquad \|v\|_s^2 = \sum_{i=1}^{r} |s(v, v_i)|^2.$
3. Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\qquad s(v, w) = \sum_{i=1}^{r} s(v, v_i) \cdot s(w, v_i).$

— *Hausaufgaben* —

H 6. Sei $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann wird durch $S : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \times & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x & , & y) & \mapsto & S(x, y) := x^T \cdot A \cdot y \end{cases}$ eine Biliearform definiert. Für welche A ist S ein Skalarprodukt?

H 7. Zeigen Sie, dass mit

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^{m\times n} & \times & \mathbb{R}^{m\times n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A & , & B) & \mapsto & s(A, B) := spur(B^T \cdot A) \end{cases}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definiert ist.
Dabei ist die Spur einer quadratischen Matrix $(c_{i,j})_{i,j} = C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert durch: $spur(C) := \sum_{i=1}^{n} c_{i,i}$.

H 8. In der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt seien die Punkte $A = (-1; 0)$, $B = (1; 0)$ und $C = (x; y)$ gegeben. Zeigen Sie die Äquivalenz: $\qquad AC \perp BC \quad \Longleftrightarrow \quad C$ liegt auf dem Einheitskreis $K = \{x \mid \|x\| = 1\}$

H 9. Formulieren Sie einen Beweis für den Höhenschnittpunktsatz im Dreieck mit Hilfe eines Skalarprodukts.

H 10. Seien A, B, C und D die Ecken eines nicht notwendigerweise ebenen Vierecks mit den Seitenlängen $b := \overline{AB}$, $c := \overline{BC}$, $d := \overline{CD}$ und $a := \overline{DA}$. Zeigen Sie durch Verwendung von (Orts-) Vektoren und Eigenschaften eines Skalarprodukts, dass für die Diagonalen gilt: $\qquad AC \perp BD \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$

H 11. Besorgen Sie sich ein DIN A2 Blatt und erstellen Sie eine Mindmap der Begriffe und Konzepte, die im vergangenen Semester in der Linearen Algebra Vorlesung eine zentrale Rolle gespielt haben.
Die Besten drei Entwürfe werden mit je einer Tafel Schokolade prämiert.

— *Informationen* —

- Die Internetseite zur Vorlesung ist: http://www-m10.ma.tum.de/bin/view/Lehre/LinAlgAGeo2SS06
- Beginn der Tutorübungen ist am 02.05.2006. Die erste Zentralübung findet am 27.04.2006 statt.
- Bitte tragen Sie sich bis zum 28.04.2006 für eine Übungsgruppe ein. Die Listen hängen am Glaskasten in 02.06.051.
- Hausaufgaben dürfen in Gruppen bis zu 3 Studenten abgegeben werden. Bitte heften Sie Ihre Unterlagen und schreiben Sie deutlich rechts oben: Blatt XX; Name 1, Name 2, Name 3; Tutorgruppe XX
- Der Termin für die Semestralprüfung ist der Mittwoch, der 26.07.2006 um 16:15 Uhr.